

Technische Mechanik
Skript zur Vorlesung
für den Studiengang Elektrotechnik

M. Mehrafza

März. 2004

Einleitung

Die **Aufgabe der Mechanik** ist die Beschreibung und die Vorherbestimmung der Bewegung von Körpern sowie die Kräfte, die mit diesen Bewegungen im Zusammenhang stehen (Bewegung im verallgemeinerten Sinn). Ein wichtiger Sonderfall der Bewegung ist der Zustand der Ruhe.

Die **mechanischen Grundsätze** sind einige wenige Naturgesetze von axiomatischen Charakter.

Ingenieurprobleme in der Mechanik werden anhand **mechanischer Modelle** untersucht, die die wesentlichen mechanischen Merkmale der realen Körper oder des Systems umfassen (Bsp. starrer Körper, Massenpunkt). Mathematik ist die präzise **Sprache der Mechanik**.

Einteilung der Mechanik:

- Hinsichtlich des Aggregatzustand des Körpers:
 - Mechanik der **festen Körper** (starre oder verformbar).
 - Mechanik der **fluiden Körper** (Flüssigkeiten, Gase und Dämpfe).
- Hinsichtlich der Grundaufgabe der Mechanik:
 - **Kinematik**: Analyse des Bewegungsablaufs ohne Berücksichtigung der einwirkenden Kräfte.
 - **Dynamik**: Analyse der Bewegung im Zusammenhang mit den einwirkenden Kräften. Wenn von den Kräften eine Bewegung hervorgeht, handelt es sich um die **Kinetik**. Wenn die Kräfte im Gleichgewicht stehen (Ruhezustand), geht es um die **Statik**.
- Hinsichtlich des Zieles und der Vorgehensweise:

- *Analytische Mechanik* untersucht die mechanischen Vorgänge um zu prinzipiellen Einsichten und Gesetzmäßigkeiten zu gelangen (Hilfsmittel analytische Mathematik). Das Detailproblem ist untergeordnet.
- *Technische Mechanik* konzentriert sich auf die Probleme und Ansprüche des konstruierenden Ingenieurs.

Teil I

Stereostatik

Kapitel 1

Grundlagen der Statik

Die Statik ist die Lehre vom **Gleichgewicht der Kräfte**, die an einem *ruhenden Körper* einwirken.

1.1 Die Kraft

Kräfte nimmt man durch ihre Wirkung wahr (Beispiel Schwerkraft). Sie sind die Ursachen von Verformungen, d. h. von Deformationen der Körper und von Änderungen des Bewegungszustandes. In der Natur sind nur zwei Arten von Kräften bekannt:

- *Volumenkräfte*, die über das Volumen eines Körpers verteilt sind (Bsp. Gewicht, magnetische und elektrische Kräfte).
- *Flächenkräfte*, die auf der Oberfläche eines Körpers auftreten und flächenförmig verteilt sind (Bsp. Wasser- oder Gasdruck auf die Behälterwand, Schnee- und Windlast auf Dach)

Einteilung der Kräfte nach ihrem Ursprung:

- Die bei einem mechanischen System vorgegebenen Kräfte nennt man *eingeprägte Kräfte*.
- Die durch die Einschränkung der Bewegungsfreiheiten des Systems entstandenen Kräfte nennt man *Reaktionskräfte*.

Idealisierung der Kräfte in der Mechanik:

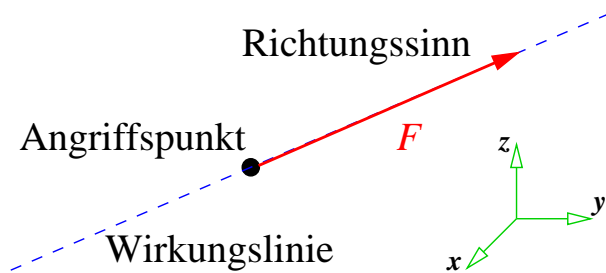


Abb. 1.1: Kraft ist durch drei Eigenschaften bestimmt: Betrag F , Richtung (Wirkungslinie und Richtungssinn) und Angriffspunkt.

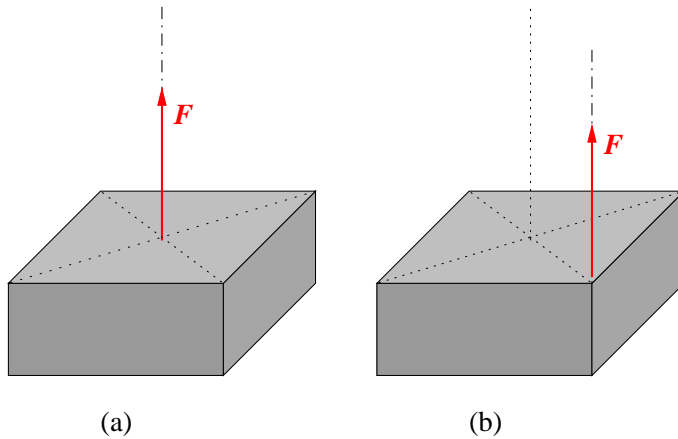


Abb. 1.2: Bei Parallelverschiebung des Kraftvektors ändert sich die Wirkung der Kraft auf den starren Körper (z. B. durch die Drehwirkung).

- *Einzelkraft* ist eine Last, die auf einen geometrischen Punkt wirkt (*Punktlast*).
- *Linienkraft* ist eine Last, die entlang einer Linie kontinuierlich verteilt ist (*Streckenlast*).

Der Begriff Kraft wird i.d.R für die idealisierte Einzelkraft verwendet.

Als physikalische Größe ist die Kraft durch drei Eigenschaften bestimmt: Betrag, Richtung und Angriffspunkt.

Der **Betrag** gibt die Größe der wirkenden Kraft an.

Die **Richtung** der Kraft wird durch ihre *Wirkungslinie* und den *Richtungssinn* auf ihr beschrieben.

Schließlich hängt die Bewegung von dem **Angriffspunkt** der Kraft ab (z. B. Drehwirkung).

Durch Betrag und Richtung ist mathematisch ein **Vektor** bestimmt. Daher ist die Kraft ein Vektor und wird auch wie ein Vektor zeichnerisch durch einen Pfeil dargestellt (s. Abb. 1.1). Der Kraftvektor hat aber einen Angriffspunkt und ist an seine Wirkungslinie gebunden. Daher kann der Kraftvektor nicht im Raum parallel verschoben werden (s. Abb. 1.2).

Kräfte werden hier fettgedruckt (\mathbf{F}) und ihre Größe wird durch F ange-

geben.

1.2 Kraftvektor in Kartesischen Koordinaten

Als ein Vektor hat die Kraft im Kartesischen Koordinatensystem (KKS) drei Komponenten, die zu den Koordinatenachsen parallel sind und mit der Abbildung des Kraftvektors auf sie vergleichbar sind. Die Richtung des Kraftvektors wird im KKS durch die Winkel α , β und γ angegeben, die der Kraftvektor mit den drei Koordinatenachsen bildet. Die Kosinus dieser Winkel werden daher die *Richtungskosinus* genannt. Die Größe der Komponenten lassen sich mit Hilfe der Richtungskosinus rechnen (s. Gln. 1.4). In Kartesischen Koordinaten gilt:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \mathbf{e}_x \\ F_y \mathbf{e}_y \\ F_z \mathbf{e}_z \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

wobei \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z die Einheitsvektoren sind. \mathbf{F} ist gleich der *Vektorsumme* eigener Komponenten:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z, \quad (1.2)$$

Für den Betrag F gilt nach dem Satz von Pythagoras im Raum

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.3)$$

Die Richtungskosinus und damit die Richtung der Kraft folgen aus

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}. \quad (1.4)$$

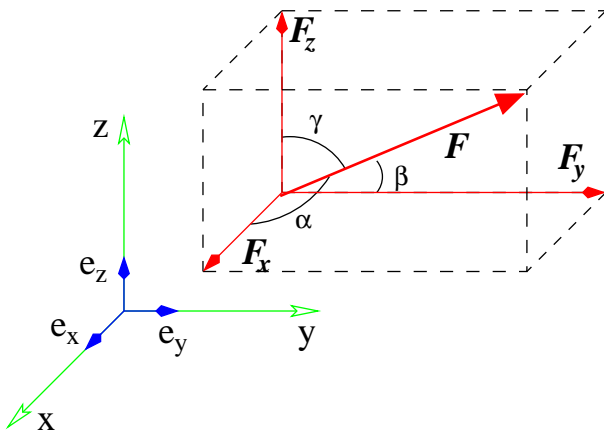


Abb. 1.3: Kraftvektor in Kartesischen Koordinaten hat drei aufeinander senkrecht stehende Komponente, die zu den drei Koordinaten parallel sind.

Die Winkel α, β und γ sind nicht unabhängig voneinander. Es gilt:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.5)$$

Für die quantitative Darstellung eines Kraftvektors im Raum sind drei Zahlen nötig, z. B. die Komponenten in Kartesischen Koordinaten oder den Betrag und zwei Winkel.

1.3 Axiome in der Statik starrer Körper

Als *starrer Körper* wird ein Körper bezeichnet, der unter der Wirkung von Kräften keine Deformationen erfährt (Idealisierung des realen deformierbaren Körpers). In der Statik werden das Gesamtsystem und seine einzelne Subsysteme als starre Körper betrachtet.

Die Statik des Starrkörpers wird auf drei Axiomen aufgebaut:

1. Zwei an einem Punkt eines Körpers angreifende Kräfte, die gleich groß sind, auf der gleichen Wirkungslinie liegen und entgegengesetzt gerichtet sind, sind im Gleichgewicht (*Gleichgewichtsaxiom*, s. Abb. 1.4).
2. Die Wirkung der an einem starren Körper angreifenden Kräfte bleibt unverändert, wenn diese entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden (*Längsverschiebungssatz*, s. Abb. 1.5).
3. Wirkt von einem Körper eine Kraft auf einen zweiten Körper, dann wirkt gleichzeitig eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft vom zweiten Körper auf den ersten Körper zurück (*Wechselwirkungsgesetz*: actio=reactio, s. Abb. 1.6).

1.4 Das Freimachen von Körpern

Es wurde bereits erwähnt, dass durch die Einschränkung der Bewegungsfreiheiten eines Körpers Reaktionskräfte entstehen. Sowohl die eingepprägten Kräfte als auch die Reaktionskräfte greifen am Körper an und

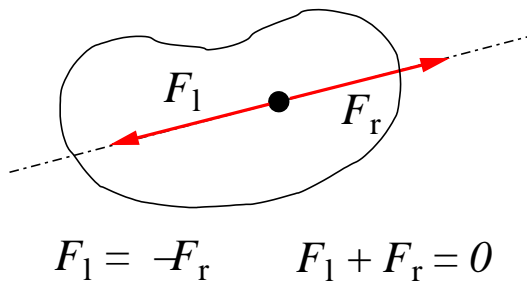


Abb. 1.4: Gleichgewichtssaxiom; zwei gleich große Kräfte, die auf der gleichen Wirkungslinie liegen und entgegengesetzt gerichtet sind, sind im Gleichgewicht.

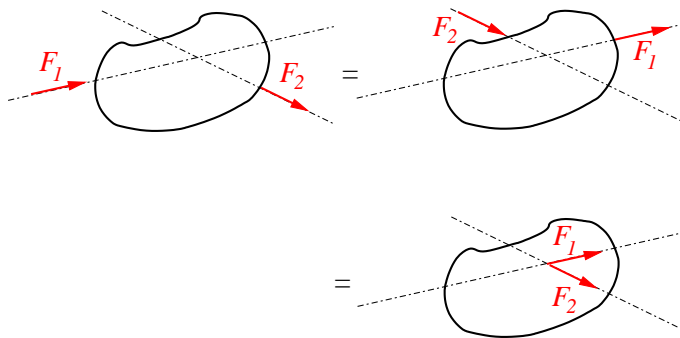


Abb. 1.5: Längsverschiebungssatz; für starre Körper bleibt die Wirkung der Kräfte unverändert, wenn sie auf ihre Wirkungslinie verschoben werden (Axiom der Linienflüchtigkeit).

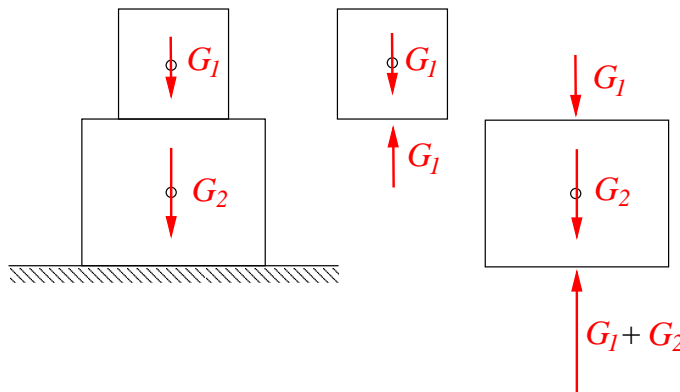


Abb. 1.6: Wechselwirkungsgesetz; das dritte Newtonsche Gesetz (actio=reactio).

belasten diesen.

Freimachen bedeutet, dass man alle den Körper tragenden Teile, wie Lager, Stützen, Einspannungen etc. durch Reaktionskräfte ersetzt, die von diesen Teilen auf den Körper wirken. Das Ergebnis wird als *Freikörperbild* des mechanischen Systems bezeichnet.

Beim Freimachen wird der Angriffspunkt, die (ungefähre) Richtung der Wirkungslinie und der Richtungssinn der Reaktionskräfte ermittelt, aber nicht die Größe der Reaktionskräfte (s. Abb. 1.7).

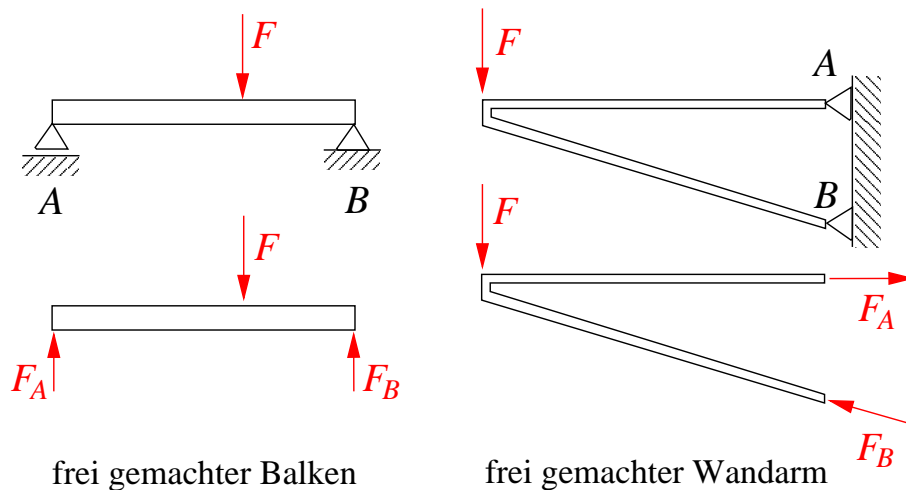


Abb. 1.7: Das Freimachen von mechanischen Systemen.

1.5 Dimensionen und Einheiten

Der Betrag einer physikalischen Größe wird vollständig angegeben durch die *Maßzahl* und die *Einheit* (Dimension), z. B. mit $Länge = 5\text{ m}$ ist die physikalische Größe “Länge“ durch die Maßzahl “5“ und die Einheit “m“ vollständig angegeben.

Bei physikalischen Größen unterscheidet man zwischen *Basisgrößen* und *abgeleiteten Größen*. Alle abgeleitete Größen lassen sich auf sieben Basisgrößen zurückführen. Mit dem *Einheitssystem SI* wurden die Einheiten international festgelegt (s. Tabelle 1.1).

Basisgröße	Einheit	Abkürzung
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	Ampere	A
Absolute Temperatur	Kelvin	K
Lichtstärke	Candel	cd
Stoffmenge	Mol	mol

Tabelle 1.1: Internationales Einheitssystem (SI)

In der Mechanik beschäftigen wir uns mit den drei Basisgrößen Länge, Masse und Zeit; hinzu kommt die Kraft als abgeleitete Größe. Eine Kraft wird mit Hilfe des Produktes Masse mal Beschleunigung berechnet. Die

daraus abgeleitete Dimension der Kraft, *Newton* (abgekürzt N), ergibt sich dann aus $kg \cdot m/s^2$.

Volumenkräfte haben die Dimension Kraft pro Volumen (N/m^3). Analog haben Flächen- bzw. Linienkräfte die Dimension N/m^2 bzw. N/m . Bei physikalischen Gleichungen haben jede Seite und jeder additive Term die Gleiche Dimension; Dies sollte zur Kontrolle von Gleichungen immer beachtet werden.

1.6 Lösung statischer Probleme

Ein statisches Probleme der technischen Mechanik wird an einem geeigneten Ersatzmodell durch folgende Schritte gelöst:

1. Feststellen der gegebenen und der gesuchten Größen.
2. Zeichnen des Freikörperbildes mit allen angreifenden Kräften (Aktions- und Reaktionskräfte).
3. Aufstellen der mechanischen Gleichungen (z.B. der Gleichgewichtsbedingungen).
4. Aufstellen geometrischer Beziehungen (falls benötigt).
5. Auflösen der Gleichungen nach den Unbekannten.

Kapitel 2

Zentrale Kraftsysteme

Ein System von Einzelkräften nennt man ein **zentrales Kraftsystem**, wenn alle ihre Wirkungslinien an einem Punkt, **Zentralpunkt**, schneiden (Sonderfall; gemeinsamer Angriffspunkt). Befinden sich alle Kräfte auf einer Ebene, dann spricht man von einem *ebenen zentralen Kraftsystem* (s. Abb. 2.1).

2.1 Resultierende eines zentralen Kraftsystems

Die Wirkung eines zentralen Kraftsystems ($\mathbf{F}_i, i = 1, \dots, n$) ist äquivalent zu der Wirkung einer **resultierenden** Kraft \mathbf{R} , die sich mittels der Vektorsumme

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F} \quad (2.1)$$

berechnen lässt. Der Angriffspunkt der Resultierenden ist der Zentralpunkt. Denken wir an die Vektoreigenschaft der Kraft, lässt sich die Gl.

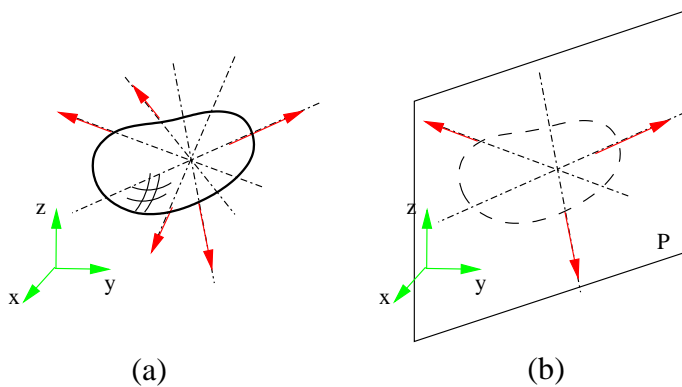


Abb. 2.1: Das zentrale Kraftsystem (a) im Raum, (b) in der Ebene.

2.1 in Kartesischen Koordinaten wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_x \\ \mathbf{R}_y \\ \mathbf{R}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{x1} \\ \mathbf{F}_{y1} \\ \mathbf{F}_{z1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{xn} \\ \mathbf{F}_{yn} \\ \mathbf{F}_{zn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \mathbf{F}_x \\ \sum \mathbf{F}_y \\ \sum \mathbf{F}_z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Dies bedeutet :

$$\mathbf{R}_x = \sum \mathbf{F}_x \quad \Rightarrow \quad R_x = \sum F_x \quad (2.3)$$

$$\mathbf{R}_y = \sum \mathbf{F}_y \quad \Rightarrow \quad R_y = \sum F_y \quad (2.4)$$

$$\mathbf{R}_z = \sum \mathbf{F}_z \quad \Rightarrow \quad R_z = \sum F_z, \quad (2.5)$$

d. h. die Komponente der Resultierende lassen sich aus der Summe der Komponenten aller Kräfte in jeweiliger Richtung berechnen. Die *Größe der Resultierende* ergibt sich, wie bereits bekannt, aus

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (2.6)$$

Die *Richtung der Resultierende* wird aus den Richtungskosinussen bestimmt (s. Gl. 1.4 und Abb. 1.3):

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}. \quad (2.7)$$

Der *Angriffspunkt der Resultierend* ist der Zentralpunkt.

Eine **Ebene** ist ein zwei dimensionaler Raum und kann durch maximal *zwei unabhängige Koordinaten* gespannt werden. Entsprechend haben die Kräfte und ihre Resultierende in einem **ebenen zentralen Kraftsystem** maximal zwei voneinander unabhängige Komponente (In Kartesischen Koordinaten \mathbf{F}_x und \mathbf{F}_y bzw. \mathbf{R}_x und \mathbf{R}_y). Die Bedingung von Unabhängigkeit der Komponenten fordert, dass die Koordinaten senkrecht zu einander stehen. Man kann jedoch eine Kraft in zwei Komponenten darstellen, die nicht voneinander unabhängig sind.

Beispiel 2.1

2.1.1 Der Parallelogrammsatz

Greifen zwei Einzelkräfte \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 in unterschiedlicher Richtung im gleichen Punkt an, dann ergibt sich die Resultierende \mathbf{R} als die Diagonale

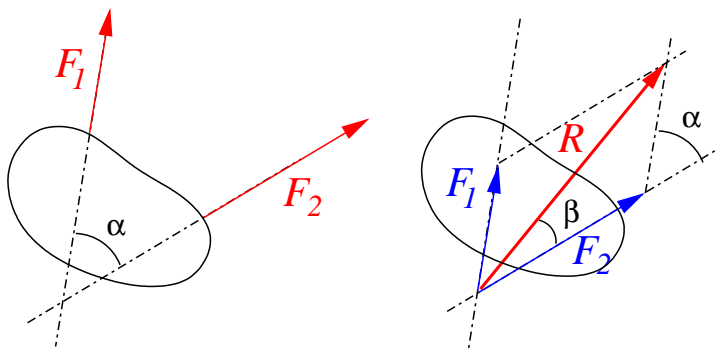


Abb. 2.2: Konstruktion des Parallelogramms zur Berechnung der Resultierenden zweier Einzelkräfte.

des aus den beiden Einzelkräften gebildeten Parallelogramms (s. Abb. 2.2). Der Schnittpunkt der Wirkungslinien von beiden Einzelkräften ist der Angriffspunkt der Resultierenden. Rechnerisch gilt nach dem Kosinussatz:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \quad (2.8)$$

Die Richtung der Wirkungslinie von \mathbf{R} gegenüber \mathbf{F}_2 ergibt sich aus dem Sinussatz:

$$\sin\beta = \frac{F_1 \sin\alpha}{R} \quad (2.9)$$

Auf diese Art kann man auch die Resultierende eines zentralen Kraftsystems mit mehr als zwei Kräften ermitteln, wenn man die Kräfte (und die Zwischenresultierende) paarweise betrachtet und sukzessiv vorgeht. (Achtung: nicht im 3D-Raum).

Beispiel 2.2

2.1.2 Sonderfall; Gemeinsame Wirkungslinie

Greifen an einem Körper mehrere Kräfte auf derselben Wirkungslinie an, dann lässt sich die Größe R der Resultierenden \mathbf{R} aus der *algebraischen Summe* aller Einzelkräfte errechnen.

$$R = F_1 + \dots + F_n = \sum F \quad (2.10)$$

Hier ist es notwendig, eine positive Richtung auf der Wirkungslinie zu wählen und jeder Kraft entsprechend ihrem Sinn ein Vorzeichen zu zuordnen.

2.2 Gleichgewicht eines zentralen Kraftsystems

Ein zentrales Kraftsystem steht im **Gleichgewicht**, wenn die Resultierende verschwindet ($\mathbf{R}=0$). Beim Gleichgewicht gilt also:

$$\mathbf{R}_x = \sum \mathbf{F}_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = \sum F_x = 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{R}_y = \sum \mathbf{F}_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = \sum F_y = 0 \quad (2.12)$$

$$\mathbf{R}_z = \sum \mathbf{F}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad R_z = \sum F_z = 0, \quad (2.13)$$

Die Gln. 2.11, 2.12 und 2.13 stellen die **erste Gleichgewichtsbedingung der Statik** dar und müssen auch für nicht zentrale Kraftsysteme erfüllt sein. Aus dieser Formulierung ist zu schließen, dass es mindestens noch eine *zweite Gleichgewichtsbedingung der Statik* geben muss. Diese werden wir in Abschnitt 3.3 kennenlernen.

Für den Sonderfall, dass alle Kräfte eine gemeinsame Wirkungslinie haben herrscht das Kräftegleichgewicht im Körper, wenn die Summe aller Kräfte Null ist (auf eine angenommene positive Richtung ist zu achten).

$$R = \sum F = 0 \quad (2.14)$$

Kapitel 3

Allgemeine Kraftsysteme

Ein System von Einzelkräften nennt man ein **allgemeines Kraftsystem**, wenn die Wirkungslinien der Kräfte *nicht* an einem Punkt schneiden. Befinden sich alle Kräfte auf einer Ebene, dann spricht man von einem *ebenen* allgemeinen Kraftsystem (Abb. 3.1).

Bevor wir uns mit der Berechnung der Resultierenden eines allgemeinen Kraftsystems befassen, machen wir uns mit einer neuen physikalischen Größe in der Mechanik vertraut.

3.1 Moment einer Kraft

Der Körper in Abb. 3.2 wurde am Punkt A so befestigt, dass er sich nur um diesen Punkt drehen kann (keine Translation möglich ist). Die Kraft \mathbf{F} stellt die Resultierende aller an den Körper angreifenden Kräfte dar. Solange die Wirkungslinie von \mathbf{F} durch den Punkt A geht, bleibt

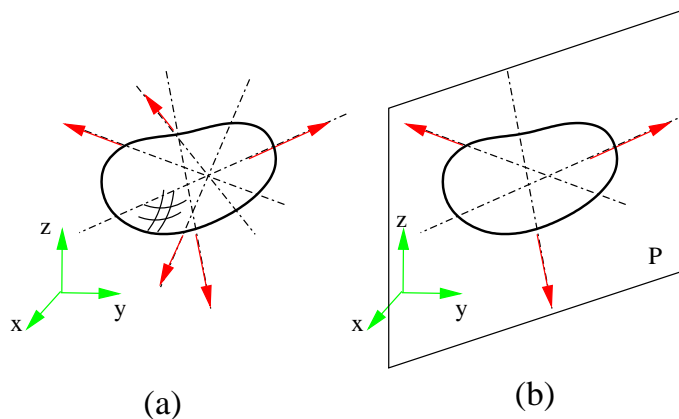


Abb. 3.1: Das allgemeine Kraftsystem: Die Wirkungslinien schneiden nicht an einem Punkt. (a) im Raum, (b) in der Ebene P .

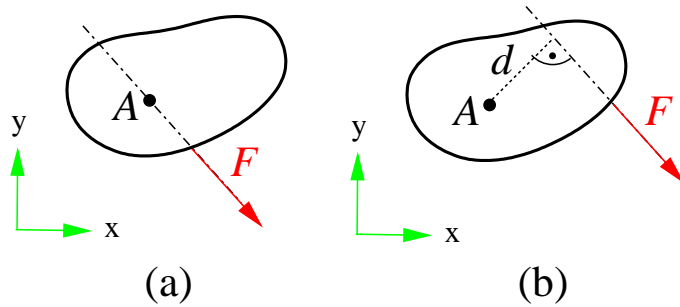


Abb. 3.2: \mathbf{F} stellt die Resultierende aller an den Körper angreifenden Kräfte dar. (a) Keine Drehwirkung. (b) Die Drehwirkung am Punkt A wird das **Moment** der Kraft \mathbf{F} bezüglich des Punktes A genannt. Seine Größe ist gleich das Produkt von Abstand “ d “ und Kraftgröße F .

der Körper in Ruhe (Abb. 3.2 a), sonst beginnt er um den Punkt A zu drehen (Abb. 3.2 b). Die Ursache dieser Drehung ist eine physikalische Größe, die **Moment** genannt wird und mit \mathbf{M} bezeichnet wird. Die Größe des Moments “ M “ hängt von der Größe der Kraft “ F “ und von dem **Hebelarm** “ d “ ab. Der Hebelarm ist die senkrechte Strecke zwischen dem Punkt A und der Wirkungslinie der Kraft. \mathbf{M} ist eine Vektorgröße mit der Einheit $[N.m]$ (Newton-meter). Der Momentenvektor steht senkrecht zu der Ebene, die den Bezugspunkt und die Wirkungslinie der Kraft einschließt. Der Bezugspunkt des Moments wird bei Bedarf durch ein Indiz oder Hochindiz angegeben, z. B. \mathbf{M}_A oder $\mathbf{M}^{(A)}$.

$$|\mathbf{M}| = M = dF \quad (3.1)$$

Ein Moment hat eine **Drehachse** und einen **Drehsinn**. In Abb. 3.2 findet die Drehung in Uhrzeigersinn und zwar um eine Achse statt, die durch den Punkt A geht und zur x, y -Ebene senkrecht ist.

Verschiebt man eine Kraft \mathbf{F} um den Betrag d parallel zu ihrer Wirkungslinie, muss die Veränderung des Moments im System durch Aufaddieren eines Moments der Größe $M = dF$ ausgeglichen werden (Abb. 3.3 a→b).

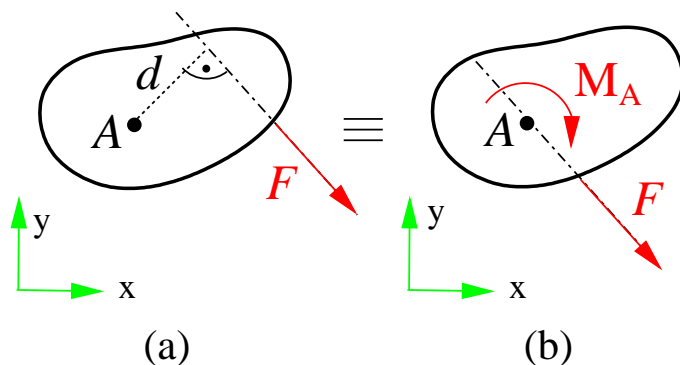


Abb. 3.3: Wenn eine Kraft parallel verschoben wird, muss die resultierende Drehwirkung durch ein entsprechendes Moment ausgeglichen werden. Umgekehrt kann auch ein Moment durch parallele Verschiebung einer in System vorhandenen Kraft ersetzt werden.

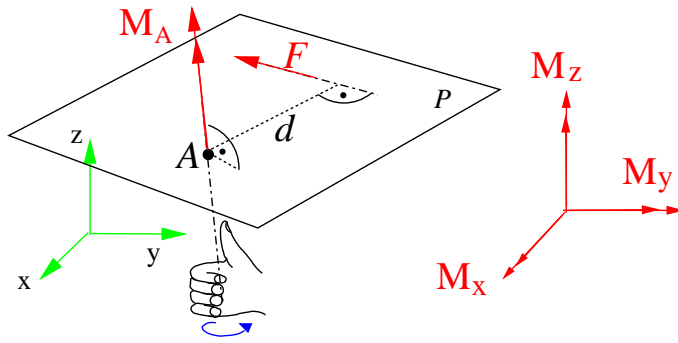


Abb. 3.4: Die Größe des Moments bezogen auf den Punkt A ist das Produkt von Hebelarm " d " und Kraftgröße " F ": $M_A = d F$. Das Moment \mathbf{M} ist ein Vektor und hat in Kartesischen Koordinaten drei Komponente.

Umgekehrt kann man auch ein Moment durch parallele Verschiebung einer im System vorhandenen Kraft ersetzen (Abb. 3.3 b→a).

Wenn die Drehachse senkrecht zur Darstellungsebene liegt, wird \mathbf{M} zeichnerisch durch ein gekrümmtes Pfeil um den Drehpunkt dargestellt (s. Abb. 3.3 b), sonst wird ein Doppelpfeil verwendet. Die Pfeillinie ist die Drehachse und der Drehsinn wird durch Rechtshand-Konvention angegeben (s. Abb. 3.4). Die zur Handfläche gebogenen Finger zeigen den Drehsinn, wenn die rechte Hand um die Achse so gehalten wird, dass der Daumen in die Pfeilrichtung zeigt.

Ein Punkt im Raum hat drei unabhängige Drehungsfreiheitsgraden. Daher hat das Moment um einen Punkt maximal drei unabhängige Komponente, z.B. in Kartesischen Koordinaten M_x , M_y und M_z . Für die Berechnung dieser Komponente kann man die Kraft in seine Komponente zerlegen und dann die resultierenden Momente um jede Koordinatenachse zusammenlegen. Dabei ist auf die Richtung der Kraftkomponente und den Drehsinn der resultierenden Momente zu achten.

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_{Ax} + \mathbf{M}_{Ay} + \mathbf{M}_{Az} = M_{Ax} \mathbf{e}_x + M_{Ay} \mathbf{e}_y + M_{Az} \mathbf{e}_z \quad (3.2)$$

Ein zweiter Weg ist die Nutzung des *Vektorprodukts* von Ortsvektor \mathbf{r} und Kraftvektor \mathbf{F} :

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Der Ortsvektor \mathbf{r} ist eine gerichtete Strecke, die den Bezugspunkt A (Abb. 3.5) mit einem *beliebigen Punkt* auf der Wirkungslinie von \mathbf{F} verbindet. Das Ergebnis des Vektorprodukts lautet:

$$\mathbf{M}_A = (r_y F_z - r_z F_y) \mathbf{e}_x - (r_x F_z - r_z F_x) \mathbf{e}_y + (r_x F_y - r_y F_x) \mathbf{e}_z \quad (3.4)$$

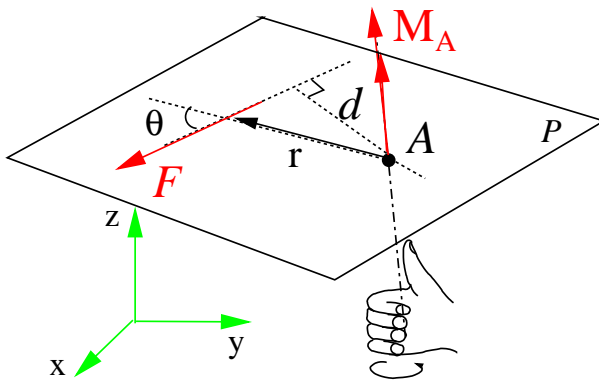


Abb. 3.5: Moment als Vektorprodukt von Ortsvektor \mathbf{r} und Kraftvektor \mathbf{F} : $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Die Größe des Moments ergibt sich aus $M_A = r F \sin \theta$

wobei r_x, r_y und r_z die Größe der Komponenten von \mathbf{r} bzw. von d darstellen. Aus Gln. 3.2 und 3.4 erhält man:

$$M_{Ax} = (r_y F_z - r_z F_y), \quad M_{Ay} = (r_z F_x - r_x F_z), \quad M_{Az} = (r_x F_y - r_y F_x) \quad (3.5)$$

Die Größe von \mathbf{M}_A ist dann:

$$M_A = \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2}, \quad (3.6)$$

oder nach Definition des Betrags eines Vektorprodukts:

$$M_A = r F \sin \theta, \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad (3.7)$$

wobei θ den Winkel zwischen den Enden von \mathbf{r} und \mathbf{F} darstellt (Abb. 3.5).

Wenn mehrere Kräfte vorhanden sind, ist das resultierende Moment um einen bestimmten Bezugspunkt die Vektorsumme aller einzelnen Momente um den Punkt:

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \cdots + \mathbf{M}_n = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.8)$$

$$M_R = M_1 + \cdots + M_n = \sum d F = \sum r F \sin \theta \quad (3.9)$$

Beispiel 3.1

3.2 Resultierende eines allgemeinen Kraftsystems

Ein allgemeines Kraftsystem kann durch Parallelverschiebung der Kräfte auf ein zentrales Kraftsystem, mit einem *frei gewählten Zentralpunkt* als

Angriffspunkt, reduziert werden. Damit die Wirkung des allgemeinen Kraftsystems unverändert bleibt, müssen die aus den Parallelverschiebungen resultierenden Momente auf das System aufaddiert werden (s. Abb. 3.6 a bis c).

Die Wirkung eines allgemeinen Kraftsystems ($\mathbf{F}_i, i = 1, \dots, n$) ist daher äquivalent zu der Gesamtwirkung einer **resultierenden Kraft \mathbf{R}** und eines **resultierenden Moments \mathbf{M}_R** .

In einem weiteren Schritt kann man (muss man aber nicht) das resultierende Moment \mathbf{M}_R durch eine Parallelverschiebung der resultierenden Kraft \mathbf{R} ersetzen. Dann hat man nur eine Resultierende, nämlich \mathbf{R} . Die Größe der unbekanntenen Parallelverschiebung x soll aus dem Momentengleichgewicht gerechnet werden (s. Abb 3.6 c und d).

Einen Sonderfall stellt ein Kraftsystem dar, in dem alle Kräfte *parallele Wirkungslinien* haben. Die Handhabung bleibt in diesem Fall die gleiche, nur die resultierende Kraft ergibt sich einfach aus der *algebraischen Summe* der Kraftgrößen F_i mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen bezogen auf eine *angenommene* positive Richtung. Die Lage der Resultierenden ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht bezüglich eines beliebigen Punktes. Wenn ein Kraftsystem Kräftepaare hat, bleiben diese im System erhalten und können nicht reduziert werden.

3.3 Gleichgewicht eines allgemeinen Kraftsystems

Ein allgemeines Kraftsystem steht im **Gleichgewicht**, wenn die resultierende Kraft und das resultierende Moment gleichzeitig verschwinden ($\mathbf{R}=0$ und $\mathbf{M}_R = 0$). Beim Gleichgewicht gilt also:

$$\sum \mathbf{F}_x = 0, \quad \sum \mathbf{F}_y = 0, \quad \sum \mathbf{F}_z = 0 \quad (3.10)$$

$$\sum \mathbf{M}_x = 0, \quad \sum \mathbf{M}_y = 0, \quad \sum \mathbf{M}_z = 0 \quad (3.11)$$

Die Gln. 3.11 stellen die **zweite Gleichgewichtsbedingung der Statik** dar, während die Gln. 3.10 uns als *erste Gleichgewichtsbedingung der Statik* bekannt sind (s. Abschnitt 2.2).

Auf die Bezeichnung eines Bezugspunktes wurde hier verzichtet. **Es ist in der Tat egal um welchen Bezugspunkt das Momentengleich-**

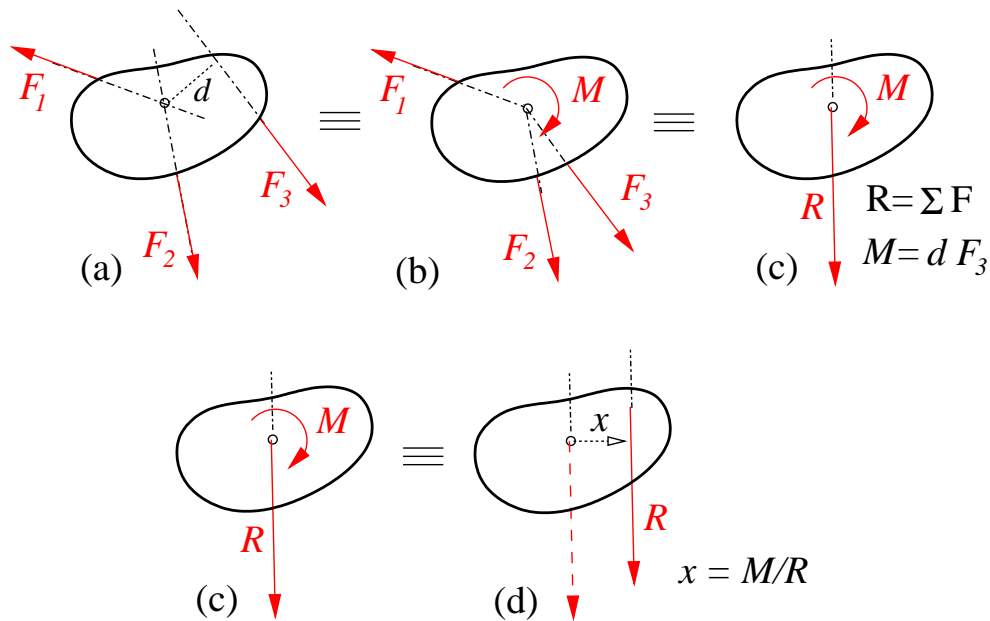


Abb. 3.6: Schritte zur Berechnung der Resultierende eines allgemeinen Kraftsystems in der Ebene.

gewicht aufgestellt wird. Der Bezugspunkt kann auch außerhalb des Körpers liegen.

In der Ebene hat jeder Punkt des Körpers nur drei Freiheitsgraden, zwei Verschiebungen und eine Verdrehung (um die Achse senkrecht zur Ebene). Daher sind für die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene nur zwei von der Gln. 3.10 und eine von der Gln. 3.11 nötig.

In der x, y -Ebene sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum \mathbf{F}_x = 0, \quad \sum \mathbf{F}_y = 0, \quad \text{und} \quad \sum \mathbf{M}_z = 0 \quad (3.12)$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung, dass die drei aufgestellte Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene voneinander unabhängig sein müssen, kann man auch andere drei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen, z. B. eine für die Kräftegleichgewicht und zwei für das Momentengleichgewicht bezogen auf zwei Bezugspunkte (A und B):

- $\sum \mathbf{F}_x = 0$, $\sum \mathbf{M}_{Az} = 0$ und $\sum \mathbf{M}_{Bz} = 0$, vorausgesetzt \overline{AB} ist nicht senkrecht zur x -Achse, oder
- $\sum \mathbf{F}_y = 0$, $\sum \mathbf{M}_{Az} = 0$ und $\sum \mathbf{M}_{Bz} = 0$, vorausgesetzt \overline{AB} ist nicht senkrecht zur y -Achse.

Gleiermaßen können auch drei Momentengleichgewichte bezogen auf drei Bezugspunkte (A , B und C) aufgestellt werden, die nicht auf einer Gerade liegen: $\sum \mathbf{M}_{Az} = 0$, $\sum \mathbf{M}_{Bz} = 0$ und $\sum \mathbf{M}_{Cz} = 0$.

Kapitel 4

Schwerpunkte und verteilte Kräfte

Massenmittelpunkt eines Körpers ist ein Punkt in dem man sich die gesamte Masse des Körpers konzentriert denken kann. Zunächst wollen wir sehen, wie dieser Punkt für einen Körper bestimmt wird. Die Analyse-methode zur Bestimmung des Schwerpunkts eines Körpers (das geometrische Zentrum) ist die selbe.

4.1 Massenmittelpunkt und Schwerpunkt eines Körpers

Zunächst betrachten wir ein System von n Partikeln, die in einem Bereich des Raumes fixiert sind (Abb. 4.1a). Das Gewicht dieser Partikel bilden ein System von parallelen Kräften, die durch ein einziges Gewicht an einem *bestimmten Punkt* ersetzt werden kann. Dieser bestimmte Punkt wird **Massenmittelpunkt** G genannt. Die Größe der Masse im Massenmittelpunkt ist gleich der Summe der Massen aller Partikeln, $W_R = \sum W$. Damit die Einwirkung des Massenmittelpunkts gleich der Einwirkung der Partikeln bleibt, muss das Moment der Gesamtmasse am G , W_R , um jede Achse (x , y und z) gleich der Summe der Momente aller Partikeln um die gleiche Achse sein:

$$\bar{y}W_R = \sum M_x = \sum yW \quad , \quad \bar{x}W_R = \sum M_y = \sum xW. \quad (4.1)$$

Diese Partikeln erzeugen kein Moment um die z -Achse, aber wir können uns vorstellen, das Koordinatensystem mit den fixierten Partikeln 90° um

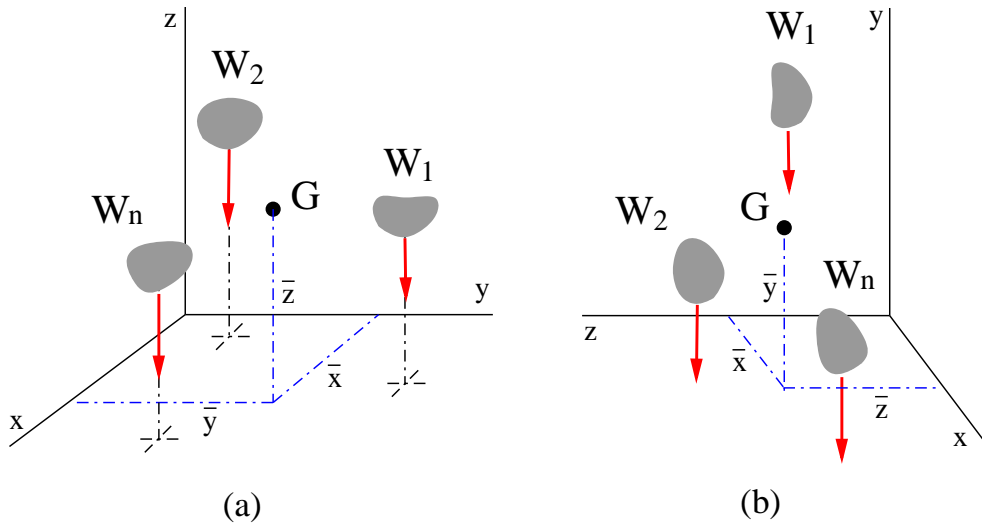


Abb. 4.1: Massenmittelpunkt eines Systems von Partikeln.

die x-Achse zu drehen (s. Abb 4.1 b) Dann haben wir

$$\bar{z}W_R = \sum M_x = \sum zW \quad (4.2)$$

Aus den Gln. 4.1 und 4.2 resultiert:

$$\bar{x} = \frac{\sum xW}{W_R} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\sum yW}{W_R} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\sum zW}{W_R} \quad (4.3)$$

Wenn die bereits betrachteten Partikeln zusammenhängen und einen Körper bilden, kann man an jedem beliebigen Punkt statt ein Partikel ein differentiales Gewicht dW annehmen. Dann soll man statt direkte Summation über den gesamten Körper integrieren:

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{\int dW} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y dW}{\int dW} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\int z dW}{\int dW} \quad (4.4)$$

Mit $dW = \rho dV$, wobei ρ das spezifische Gewicht und dV ein differentiales Volumen darstellen, erhält man:

$$\bar{x} = \frac{\int_V x \rho dV}{\int_V \rho dV} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int_V y \rho dV}{\int_V \rho dV} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\int_V z \rho dV}{\int_V \rho dV} \quad (4.5)$$

Wenn der Körper homogen ist ($\rho = konst.$) lässt sich das spezifische Gewicht als Konstante auskreuzen. Somit erhält man die Koordinaten eines Punktes, der nur von der Geometrie des Körpers abhängt und der

Schwerpunkt S des Körpers genannt wird. Jede gerade Linie, die durch den Schwerpunkt hindurch geht, heißt eine **Schwerachse**. Auf die Schwerachse bezogen, ist das Drehmoment des Körpers gleich Null. Symmetrieachsen eines Körpers (falls vorhanden) sind auch Schwerachsen, weil das Drehmoment des Körpers um die Symmetrieachsen verschwindet. Für die Berechnung der Koordinaten des Schwerpunkts sind drei Fälle zu unterscheiden:

Koordinaten des **Schwerpunkts eines Volumens**:

$$\bar{x} = \frac{\int_V x dV}{V} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int_V y dV}{V} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\int_V z dV}{V} \quad (4.6)$$

Ist ein Körper aus einfachen Teilen zusammengesetzt, deren Schwerpunkte und Volumen bekannt sind, lassen sich die Integrale in Summen umschreiben:

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} V}{\sum V} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} V}{\sum V} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} V}{\sum V} \quad (4.7)$$

wobei \tilde{x} , \tilde{y} und \tilde{z} die Koordinaten des Schwerpunktes von jedem Teil darstellen.

Koordinaten des **Schwerpunkts einer Fläche**:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{A} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int_A y dA}{A} \quad (4.8)$$

Die Integrale $\int_A x dA$ und $\int_A y dA$ werden *statische Momente* oder *Flächenmomente erster Ordnung* genannt. Die statische Momente sind

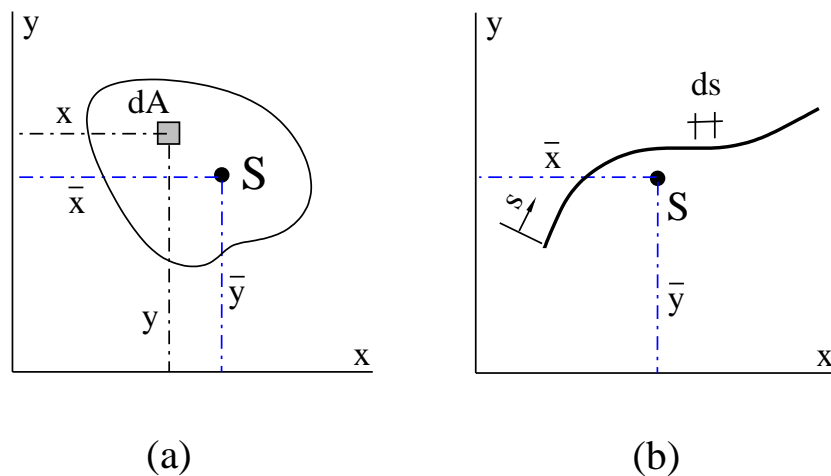


Abb. 4.2: Zur Berechnung des Schwerpunktes (a) einer Fläche, (b) einer Linie.

bezogen auf Schwerachsen (und damit auch bezogen auf die Symmetriachsen) gleich Null.

Besteht die Fläche aus einfachen Teilflächen mit bekannten Koordinaten des Schwerpunktes und den Flächeninhalt, erhält man:

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} A}{\sum A} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} A}{\sum A} \quad (4.9)$$

Schwerpunkt einer *Linie* (Abb. 4.2 b):

$$\bar{x} = \frac{\int_L x ds}{L} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int_L y ds}{L} \quad (4.10)$$

wobei L die gesamte Länge der Linie und ds eine infinitesimale Länge auf der Linie zeigen. Besteht die Linie aus geraden Teilstücken, hat man:

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} L}{\sum L} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} L}{\sum L} \quad (4.11)$$

Beispiel 4.1

4.2 Verteilte Kraftsysteme

In vielen Fällen wird ein Körper durch verteilte Last auf seiner Flächen belastet. Der Effekt solcher Kraftsysteme kann einfacher berechnet werden, wenn wir diese durch ihre Resultierende ersetzen.

4.2.1 Verteilte Kräfte über einer Ebene

Die Lastverteilungsfunktion $p(x, y)$ definiert die Lastintensität gemessen als Kraft pro Flächeneinheit $[N/m^2]$. Mit $p(x, y)$ ist die *Größe der infinitesimalen Kraft* $d\mathbf{F}$ (d.h. dF) auf einer differentiellen Fläche dA an einem beliebigen Punkt bekannt (s. Abb. 4.3).

$$dF = p(x, y) \cdot dA \quad [N] \quad (4.12)$$

Die *Größe der Resultierenden* \mathbf{R} ergibt sich aus

$$R = \int_A p(x, y) dA \quad (4.13)$$

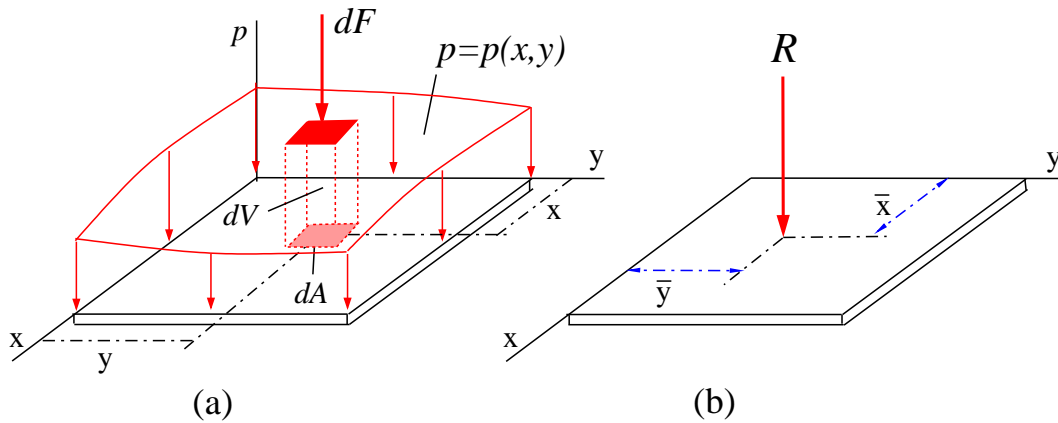


Abb. 4.3: Zur Berechnung der Resultierenden eines auf einer Ebene verteilten Kraftsystems.

$p(x, y) dA$ ist ein differentielles Volumenelement, dV . Somit ist die Größe der Resultierenden, R , dem gesamten Volumen unter dem Diagramm der verteilten Last gleich.

Die *Lage der Resultierenden* \mathbf{R} , d.h. (\bar{x}, \bar{y}) , ergibt sich aus der Gleichsetzung ihres Momentes mit der Summe der Momente aller infinitesimalen Kräfte $d\mathbf{F}$ um die y - bzw. x -Achse.

$$\bar{x} = \frac{\int_A xp(x, y)dA}{\int_A p(x, y)dA} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int_A yp(x, y)dA}{\int_A p(x, y)dA} \quad (4.14)$$

Mit $dV = p(x, y)dA$ erhalten wir:

$$\bar{x} = \frac{\int_V xdV}{\int_V dV} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int_V ydV}{\int_V dV} \quad (4.15)$$

Die Wirkungslinie von \mathbf{R} geht durch den Schwerpunkt des Volumens unter dem Diagramm der verteilten Last.

4.2.2 Linienförmig verteilte Kräfte entlang einer Geraden

Wenn die Verteilung der Last auf einer x, y -Ebene in einer Richtung konstant bleibt, hängt die Verteilungsfunktion in anderer Richtung nur von einem Variablen ab. Z. B ist $p(x, y)$ für jede x konstant und unabhängig von y , dann gilt $p = p(x)$ (s. Abb. 4.5). Wenn wir diese Funktion mit einer

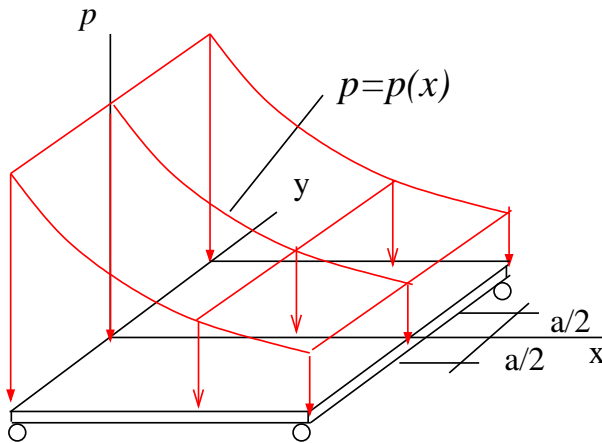


Abb. 4.4: Sonderfall eines auf einer Ebene verteilten Kraftsystems; für jede x bleibt $p(x,y)$ von y unabhängig.

Bereite a von der Ebene multiplizieren, erhalten wir

$$W(x) = p(x) a \quad [N/m^2][m] = [N/m] \quad (4.16)$$

Konsequenz: Die Lastintensitätsdiagramm für $W = W(x)$ stellt ein System von ebenen parallelen Kräften dar (s. Abb. 4.4a). Jede infinitesimale Kraft dF wirkt auf ein Längenelement dx , sodass an jedem Punkt x gilt:

$$dF = W(x) dx \quad [N/m][m] = [N] \quad (4.17)$$

Die Größe der Resultierenden und ihre Position \bar{x} lässt sich nach der gleichen Methode wie bei der Flächenlast berechnen:

$$R = \int_L W(x) dx \quad , \quad \bar{x} = \frac{\int_L x W(x) dx}{\int_L W(x) dx} \quad (4.18)$$

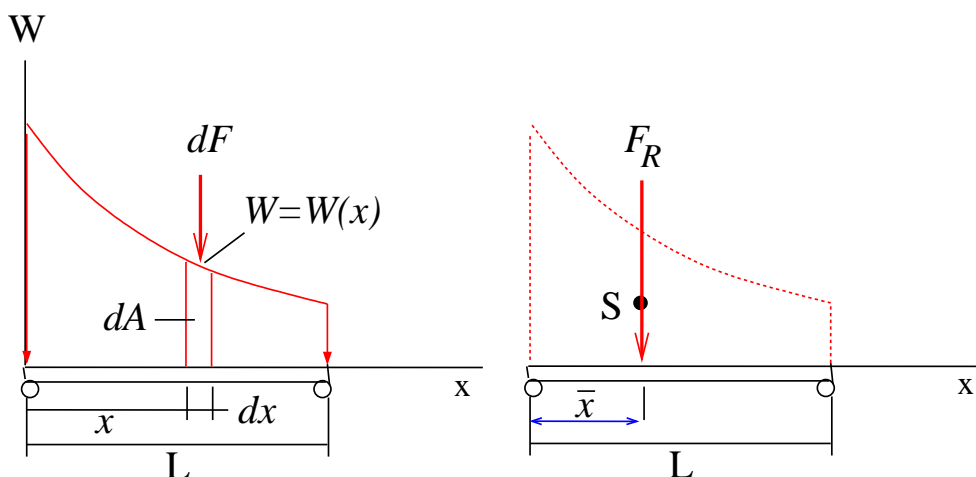


Abb. 4.5: Zur Berechnung der Resultierenden eines auf einer Ebene verteilten Kraftsystems.

Mit $W(x)dx = dA$ erhält man:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \quad (4.19)$$

Das ist die \bar{x} -Koordinate des Schwerpunktes von der Fläche. Daher geht die Wirkungslinie der Resultierenden durch den Schwerpunkt der Fläche unter dem Diagramm der Lastverteilung hindurch (s. Abb. 4.4 b).

Beispiel 4.2

Kapitel 5

Lagerreaktion

Lager sind Bindungen, die die von einem Tragwerk getragene Last zu der Umgebung (oft zu einem Fundament) oder zu einem anderen Tragwerk weiterleiten. Durch Bindungen werden Verschiebungsfreiheiten (Translationen und Drehungen) eingeschränkt, die zu *Lagerreaktionen* führen. Diese Reaktionskräfte wirken nach drittem Axiom der Statik (*actio=reactio*) in entgegengesetzter Richtung auf das Tragwerk. Je nach Art der Lager können sie eine maximale Zahl von Freiheitsgraden einschränken. Die Anzahl der eingeschränkten Freiheitsgraden einer Lager wird **Wert** der Lager genannt.

Tragwerke werden nach ihrer *geometrischen Form* und nach der *Belastung* klassifiziert. Ein Bauteil, dessen Querschnittsabmessungen sehr viel kleiner sind als seine Längenabmessung und das nur axial belastet wird (Zug oder Druck), heißt **Stab**. Liegt eine Belastung quer zur Achse solches Bauteils vor, so nennt man es einen **Balken**. Ein gekrümmter Balken heißt **Bogen**. Tragwerke, die aus abgewinkelten, starr miteinander verbundenen Balken zusammengesetzt sind, werden als **Rahmen** bezeichnet. Ebene Bauteile (Dicke klein gegen Seitenlängen) heißen **Scheiben**, wenn sie in ihrer Ebene und **Platten**, wenn sie quer dazu belastet werden. Ein gekrümmtes Flächentragwerk nennt man **Schale** (s. Abb. 5.1).

Ein Tragwerk, das in einer Ebene liegt, heißt ein *ebenes Tragwerk*. Wird ein solches Tragwerk in seiner Ebene belastet, hat dann drei Freiheitsgrade (2 Translationen und eine Drehung um die Achse normal zu dessen Ebene). Liegt die Belastung nicht in der Tragwerksebene oder das Tragwerk ist selbst ein räumliches, so erhöhen sich die Bewegungsmöglichkeiten auf

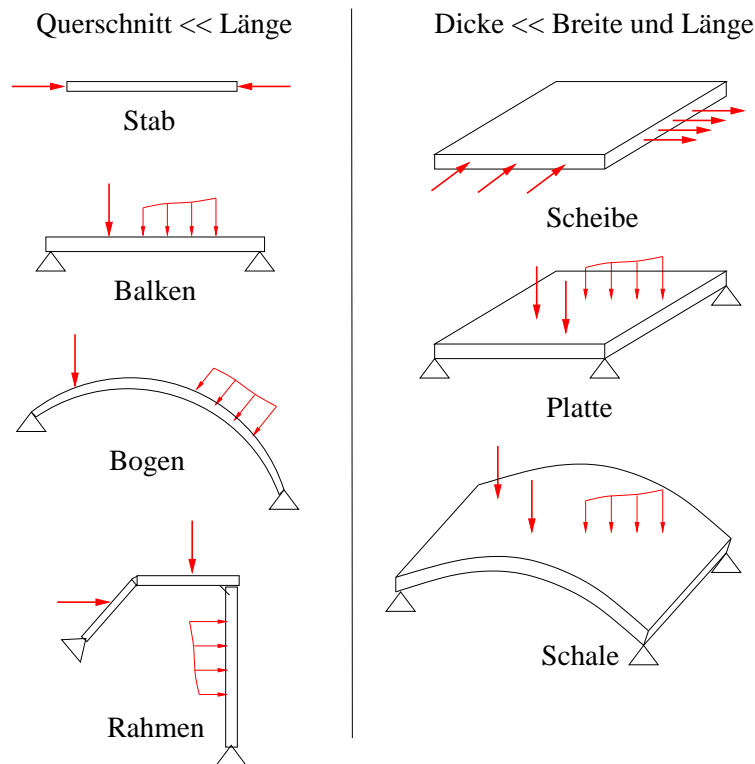


Abb. 5.1: Klassifizierung der Tragwerke nach Geometrie und Belastungsart.

sechs (3 Translationen und 3 Drehungen).

Entsteht durch die Lagerung des Tragwerks r Lagerreaktionen, so gilt für die Anzahl der Freiheitsgrade f eines Tragwerks

$$f = 3 - r \quad \text{in der Ebene und} \quad (5.1)$$

$$f = 6 - r \quad \text{im Raum.} \quad (5.2)$$

5.1 Lagerungsarten in der Ebene

Einwertige Lager ($r=1$): Rollenlager, Gleitlager und Pendelstütze verhindern die zur Lagerebene normale Verschiebung und tragen daher nur eine Reaktionskraft (s. Tab. 5.1 Nr. 1, 2 und 3).

Zweiwertige Lager ($r=2$): Festlager und Doppelstütze schränken die zur Lagerebene senkrechte und parallele Verschiebungen ein und tragen daher zwei Reaktionskräfte (Tab. 5.1 Nr. 4 und 5). Weitere zweiwertige Lager

Nr.	Lagerart	Darstellung	Symbol	Freikörperbild	r
1	Rollenlager				1
2	Gleitlager				
3	Pendelstütze				
4	Festlager				2
5	Doppelstütze				2
6	Parallelführung				
7	Schiebehülse				
8	Einspannung				3
9	Dreifachstütze				3

Tabelle 5.1: Lagerungsarten und Lagerreaktionen in der Ebene

sind Parallelführung und Schiebehülse, die jeweils eine Verschiebung und eine Drehung einschränken und tragen daher eine Kraft und ein Moment (Tabelle 5.1 Nr. 6 und 7).

Dreiwertige Lager ($r=3$): Einspannung und Dreifachstütze (nicht parallel und nicht zentral) schränken zwei Verschiebungen und eine Drehung und tragen daher drei Reaktionskräfte und ein Moment (Tabelle 5.1 Nr. 8 und 9).

5.2 Statische Bestimmtheit

Wenn die Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können, heißt das Tragwerk *statisch bestimmt* gelagert.

Notwendige Bedingung: Die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen ist gleich der Anzahl der unbekanntes Lagerreaktionen ($f = 0$).

Hinreichende Bedingung: Das Tragwerk ist kinematisch bestimmt, d. h. das Tragwerk oder ein Teil davon kann keine endliche oder infinitesimale Bewegungen ausführen (s. Abb. 5.2). In der Ebene sind beide Bedingungen erfüllt, wenn

- die Lagerreaktionen drei Kräfte sind, die nicht parallel und nicht zentral sind, oder
- die Lagerreaktionen aus zwei Kräfte und einem Moment bestehen, wobei die Kräfte nicht parallel sind.

Ein Tragwerk ist *statisch unbestimmt* gelagert, wenn die Anzahl der unbekanntes Lagerreaktionen, die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen übersteigen ($f < 0$). Die überzählige Lagerreaktionen bestimmen wieviel fach das Tragwerk statisch unbestimmt gelagert ist. In der Ebene liegt z. B. für $r = 5$ eine zweifach statisch unbestimmte Lagerung vor. Die Lagerreaktionen statisch unbestimmt gelagerter Tragwerke können bestimmt werden,

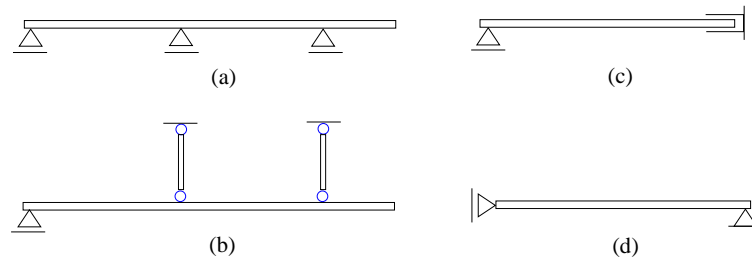


Abb. 5.2: *Statisch bestimmt jedoch kinematisch unbestimmt gelagerte Balken.*

wenn die Tragwerke nicht als starr angesehen, sondern ihre Verformungen berücksichtigt werden (Elastostatik).

5.3 Berechnung der Lagerreaktionen

Zur Ermittlung der Lagerreaktionen sind folgende Schritte durchzuführen:

1. Freischneiden: Aufstellung des Freikörperbildes mit allen angreifenden Kräften (eingeprägte Kräfte und Lagerraktionen).
2. Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen.
3. Lösung des Gleichungssystems für unbekannte Lagerreaktionen.

Beispiel 5.1

5.4 Mehrteilige Tragwerke

Tragwerke bestehen oft aus einer Anzahl von starren Körpern, die in geeigneter Weise miteinander verbunden sind. Die Verbindungselemente übertragen Kräfte bzw. Momente, die **Verbindungsreaktionen** genannt werden und durch Schnitte sichtbar gemacht werden können. Die Zahl der Verbindungsreaktionen zeigen wir mit v . Die Verbindungsreaktionen wirken nach dem Prinzip *actio=reactio* entgegengesetzt auf die Teilkörper.

Für die **Bestimmung der Lager- und Verbindungsreaktionen** sind die ersten zwei Lösungsschritten, die für ein einteiliges Tragwerk zu machen sind, für jedes einzelne Teilsystem vorzunehmen (Freikörper und Gleichgewichtsbedingungen). Daraus ergibt sich für n Teilsysteme $3n$ Gleichungen. Der dritte Schritt ist dann die Lösung des Gleichungssystems für $r + v$ unbekannte Lager- und Verbindungsreaktionen.

Die *notwendige Bedingung* für das Wesen der Lösung im dritten Schritt ist, dass die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen, $3n$, gleich der Zahl der Unbekannten, $r + v$, ist.

$$r + v = 3n \quad (5.3)$$




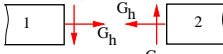


Verbindungselement	Darstellung	Übertragene Größe	Freikörperbild	ν
Pendelstab		eine Kraft in seiner Längsrichtung		1
Gelenk		eine Kraft in beliebiger Richtung		2
Parallelführung		eine Kraft in Längsrichtung und ein Moment		2

Tabelle 5.2: Verbindungselemente und übertragene Größe

Die *hinreichende Bedingung* ist wie vorher die *kinematische Bestimmtheit*.

Jedes Verbindungselement erhöht die Anzahl der Teilsysteme um 1 und der Gleichgewichtsbedingungen um 3. Je nach Art der Verbindung werden 2 oder 1 von diesen Gleichungen für die Bestimmung der Verbindungsreaktionen gebraucht. Also ein Verbindungselement stellt 1 oder 2 zusätzliche Gleichungen zur Bestimmung der Lagerreaktionen zur Verfügung. Wenn es zunächst nur um die Bestimmung der Lagerreaktionen geht, kann man statt $3n$ Gleichungen $3 + \text{Anzahl der zusätzlichen Gleichungen}$ heranziehen um die unbekanntes Lagerreaktionen zu rechnen. Anschließend kann man die Verbindungsreaktionen durch Gleichgewichtsbedingungen an Teilsystemen berechnen.

Beispiel 5.2

5.4.1 Dreigelenkbogen

Dreigelenkbogen ist ein allgemeiner Begriff für Tragwerke, die aus zwei Teilsystemen beliebiger Form bestehen, die jeweils gelenkig miteinander verbunden sind und durch eine Festlager (zweiwertig) gelagert sind (Abb. 5.3). Ein Dreigelenkbogen ist statisch bestimmt, weil die Zahl der unbekanntes Lager- und Verbindungsreaktionen $r + v = 4 + 2 = 6$ gleich der Zahl der Gleichgewichtsbedingungen, $3n = 6$, für zwei Teilsysteme ist.

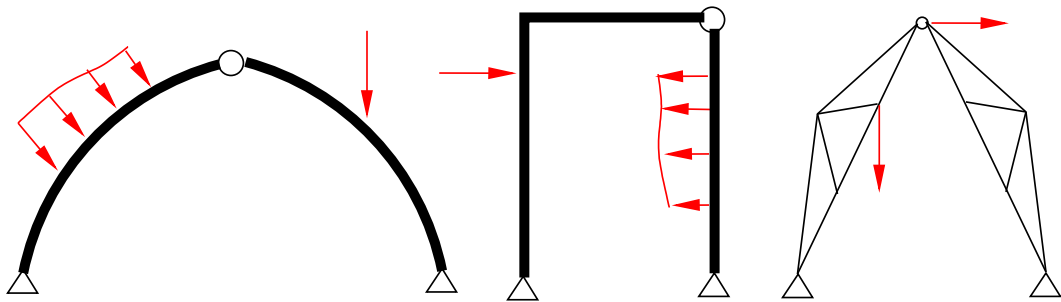


Abb. 5.3: Dreigelenkbogen.

5.4.2 Gelenkbalken

Wird eine Balkenkonstruktion auf mehr als zwei Lager kinematisch bestimmt gelagert (Durchlaufträger), entsteht ein statisch unbestimmtes Tragwerk. Um das System auf ein statisch bestimmtes zu überführen, werden an geeigneten Stellen Gelenke eingeführt. Auf dieser Weise entstandener mehrteiliger Balkenträger heißt **Gelenkbalken** oder *Gerber-Träger* (nach G. Gerber 1832-1912). Die notwendige Anzahl der Gelenke ist gleich der Anzahl der unbestimmten Lagerreaktionen. Diese ergibt sich aus der folgenden Berechnung: Mit g eingeführten Gelenken erhält man $n = g + 1$ Teilsysteme. Für die statische Bestimmtheit solches System muss gelten: $r + v = 3n$, d. h. $r + 2g = 3(g + 1)$, und daraus ergibt $g = r - 3$, was der Anzahl der statischen Unbestimmtheit entspricht. Bei der Anordnung der Gelenke muss man darauf achten, dass das System nicht kinematisch unbestimmt wird (s. Abb. 5.4).

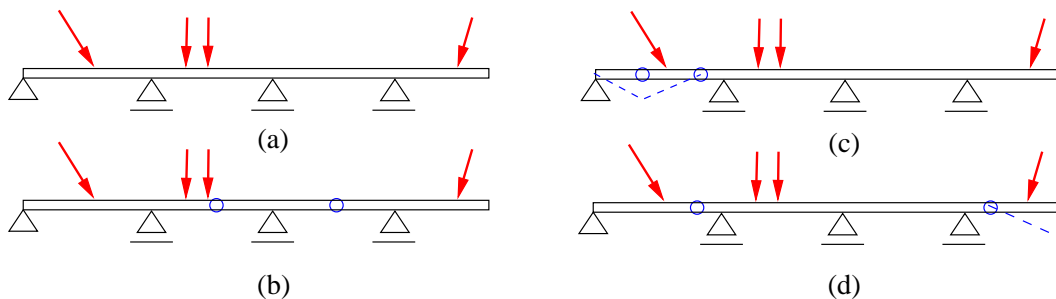


Abb. 5.4: (a) Zweifach statisch unbestimmter Durchlaufträger, (b) statisch bestimmter Gelenkbalken, (c) und (d) kinematische Unbestimmtheit durch falsche Anordnung der Gelenke.

Kapitel 6

Strukturanalyse

Unter Strukturanalyse versteht man die Bestimmung der **Beanspruchungsgrößen** (auch **Schnittgrößen** genannt) in den einzelnen Bauelementen. Die erste Strukturanalyse liefert wichtige Informationen für den Entwurf der Bauteile und Verbindungen.

6.1 Fachwerk

Ein Tragwerk, das nur aus geraden Stäben besteht, die in sogenannten **Knoten** miteinander verbunden sind, heißt **Stabwerk** oder **Fachwerk**. Mit folgenden Idealisierungsannahmen können die Stabkräfte in einem Fachwerk berechnet werden:

1. Die Stäbe sind an den Knoten zentrisch und gelenkig miteinander verbunden (Die Knoten sind reibungsfreie Gelenke).
2. Die äußeren Kräfte greifen nur in den Knoten an.

Diese sind Voraussetzungen für ein *ideales Fachwerk*, bei dem die Stäbe nur auf zug oder Druck beansprucht werden.

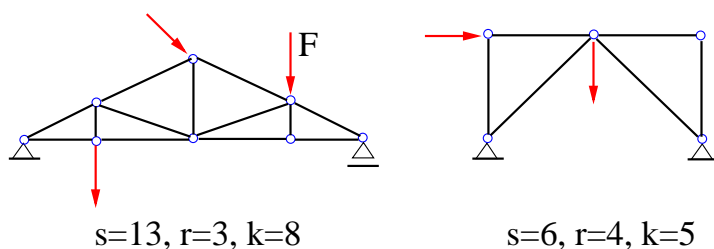


Abb. 6.1: Ideale Fachwerke; Die Stäbe sind zentrisch an reibungsfreien Gelenken miteinander verbunden und die äußere Last greift nur in den Knoten an.

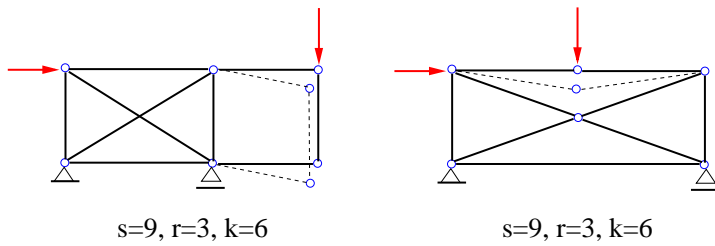


Abb. 6.2: Beispiele von kinematisch unbestimmten Fachwerken.

6.1.1 Statische Bestimmtheit

Ein Fachwerk heißt statisch bestimmt, wenn die Lagerreaktionen und die Stabkräfte allein aus den Gleichgewichtsbedingungen (d. h. aus der Statik) bestimmbar sind. Wir beschränken uns hier auf ebene Fachwerke. Man erhält bei einem ebenen Fachwerk mit k Knoten, s Stäben und r Lagerreaktionen insgesamt $r + s$ Unbekannten. Zur Verfügung stehen $2k$ Gleichungen, die aus zwei Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knoten hergeleitet werden. Die notwendige Bedingung für die Bestimmung der Lager- und Stabkräfte ist daher

$$2k = s + r. \quad (6.1)$$

Die *hinreichende Bedingung* ist die kinematische Bestimmtheit, und wird erfüllt, wenn die Lage aller Knotenpunkte festliegt (keine kleine oder große Beweglichkeit möglich ist). Abbildung 6.2 zeigt Beispiele von kinematisch unbestimmten Fachwerken.

6.1.2 Ermittlung der Stabkräfte, Knotenpunktverfahren

Für die Ermittlung der Stabkräfte in einem Fachwerk gibt es außer graphischer Methoden eine Reihe von analytischen Methoden. Oft bietet eine Kombination von zwei analytischen Methoden einen geschickteren Lösungsweg, hier wollen wir aber uns nur auf das Knotenpunktverfahren konzentrieren, das zwar oft nicht optimal jedoch immer erfolgreich ist.

Bei Knotenpunktverfahren werden zunächst alle Knoten freigeschnitten und dann wird für jeden Knoten die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt (2 in der Ebene). Das Freischneiden von Knoten ist einfach; Man ersetzt jeden Stab am betrachteten Knoten durch eine Kraft, deren Wirkungslinie die Stabachse und deren Richtung vom Knoten nach außen

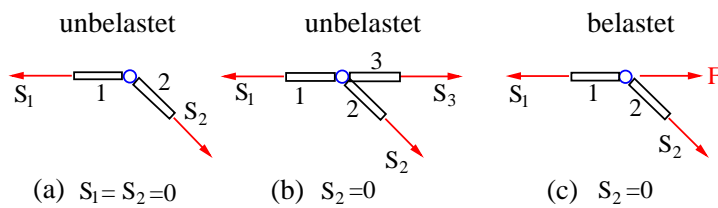


Abb. 6.3: Regeln beim Auffinden der Nullstäbe in einem Fachwerk.

zeigt (d.h. die Stabkraft wird zuerst als Zugkraft angenommen). Vergessen darf man natürlich nicht die äußere Kräfte und Lagerreaktionen (wenn am Knoten vorhanden).

Bei der praktischen Durchführung ist es zweckmäßig, zuerst nach Stäben suchen, die offensichtlich keine Stabkraft haben (können). Diese Stäbe heißen **Nullstäbe**. Das Auffinden von Nullstäben reduziert die Anzahl der Unbekannten.

Regeln beim Auffinden der Nullstäbe:

1. Sind an einem *unbelasteten Knoten* zwei Stäbe angeschlossen, die nicht in gleicher Richtung liegen, so sind beide Stäbe Nullstäbe (Abb. 6.3a).
2. Sind an einem *unbelasteten Knoten* drei Stäbe angeschlossen, von denen zwei in gleicher Richtung liegen, so ist der dritte Stab ein Nullstab (Abb. 6.3b).
3. Sind an einem *belasteten Knoten* zwei Stäbe angeschlossen und greift die äußere Kraft in Richtung des einen Stabes an, so ist der andere Stab ein Nullstab (Abb. 6.3c).

Vereinbarung: Schneidet man den Stab am Knoten, zeigt die Kraft am Stabende und am Knoten nach außen (*actio=reactio*), wenn der Stab unter Zugbelastung steht. Besteht der Stab unter Druckbelastung, so zeigt die Kraft am Stabende und am Knoten nach innen. Für die Bildung des Kräftegleichgewichts am Knoten, nehmen wir zunächst alle am Knoten wirkende Kräfte als Zugkräfte (nach außen gerichtet). Stellt sich am Ende ein negativer Betrag für eine Kraft heraus, bedeutet, dass der entsprechende Stab unter Druckstab ist.

Beispiel 6.1

6.2 Balken und Rahmen

Welche Tragwerke als Balken und Rahmen bezeichnet werden, haben wir im Abschnitt 5 vorgestellt. Die Bestimmung der Schnittgrößen in beiden Fällen ist bis auf kleine Unterschiede, die wir an ihrer Stelle erklären, identisch. Damit man allein mit Hilfe der Statik die Schnittgrößen an jeder Stelle eines Balkens oder Rahmens bestimmen kann, müssen die Bedingungen der statischen und der kinematischen Bestimmtheit des Tragwerks erfüllt sein. Diese sind im Allgemeinen nichts anders als die Bedingungen bei mehrteiligen Tragwerken. Hier beschränken wir uns auf Balken und Rahmen in der Ebene.

6.2.1 Schnittgrößen

Zuerst stellen wir uns einen Balken unter Last und im statischen Gleichgewicht vor. Das statische Gleichgewicht gilt auch für jeden Teil des Balkens, wenn wir ihn an einer beliebigen Stelle schneiden und an der selben Stelle die inneren Kräfte aufbringen, die vor dem Schneiden vorhanden waren (s. Abb. 6.4a und b). Diese inneren Kräfte bilden i.d.R. ein allgemeines Kraftsystem, dessen Resultierende eine Kraft und ein Moment in der Ebene des Tragwerkes sind (s. Abschnitt 3.2). Diese Resultierende an einer beliebigen Schnittstelle werden wir **Schnittgrößen** nennen und kategorisch in drei *Beanspruchungsgrößen* teilen:

1. Kraftkomponente in Richtung der Längsachse, *Normalkraft* N ,
2. Kraftkomponente quer zur Längsachse, *Schub- oder Querkraft*, Q ,
und
3. Moment um eine Achse normal zur Tragwerksebene.

Damit diese Größen nicht mehr reduzierbar sind, soll der Angriffspunkt der resultierenden Kraft, und damit auch deren Komponenten N und Q , der Schwerpunkt der Schnittfläche sein. Die Drehachse des Moments soll auch durch diesen Punkt gehen, d.h. eine Schwereachse der Schnittfläche sein.

Nun sind noch die Richtung der Kräfte und den Drehsinn des Moments

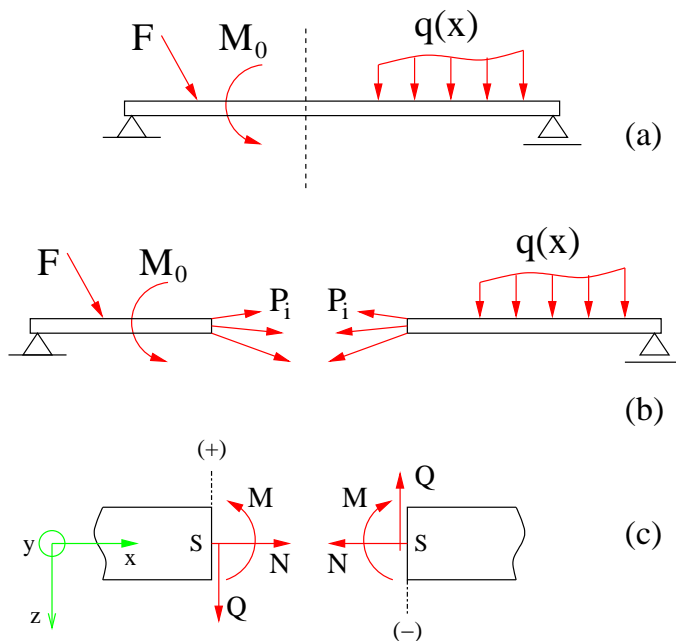


Abb. 6.4: (a) Schneiden eines Balkens, (b) Gleichgewicht der inneren Kräfte an der Schnittstelle, (c) Das Ersetzen der inneren Kräfte durch Resultierende N , Q und M hält die Balkenteile im Gleichgewicht. Die Schnittgrößen sind in dargestellter Form als positiv festgelegt.

festzulegen (Vorzeichenfestlegung). Dafür setzen wir ein Koordinatensystem fest und nutzen wir eine Konvention: Die x -Achse des Koordinatensystems fällt mit der Balkenachse zusammen und zeigt nach rechts, während z -Achse nach unten gerichtet ist.

Vorzeichenfestlegung: Durch das Schneiden des Tragwerksteils entstehen zwei *Schnittufer*, die durch je einen Normalenvektor n , der jeweils vom Inneren des Tragwerksteils nach außen zeigt, charakterisiert werden. Die Bezeichnung der Schnittufer als positiv oder negativ hängt davon ab, ob dessen Normalenvektor in positive oder in negative Richtung der x -Achse zeigt. Die Vorzeichen der Schnittgrößen kann man dann so festlegen:

Am positiven Schnittufer zeigen die positiven Schnittgrößen in positive Koordinatenrichtungen. Am negativen Schnittufer zeigen die positiven Schnittgrößen in negative Koordinatenrichtungen (Abb. 6.4c).

Bei Rahmen kennzeichnet man eine Seite jedes Tragwerkselements durch eine gestrichelte Linie als Unterseite. Angefangen wird von dem äußerst linken Lager und zwar auf der unteren (bzw. inneren) Seite des ersten Tragwerkselements nach rechts. Dabei darf kein Tragwerkselement durch die gestrichelte Linie gechnitten werden. Dort, wo die gestrichelte Linie einen Knick bekommt oder neu anfängt, wird ein neues Koordinatensy-

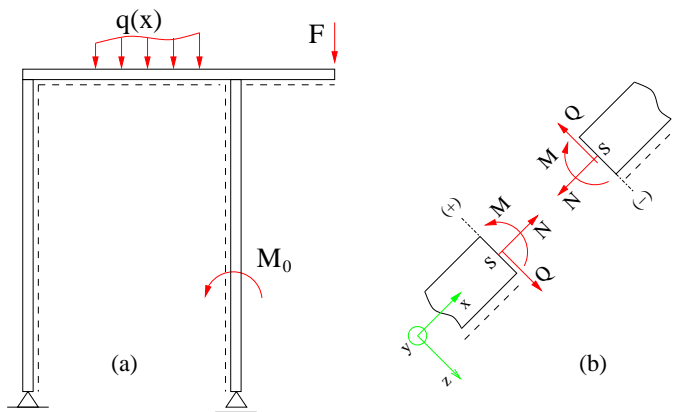


Abb. 6.5: (a) Kennzeichnung der Unterseite von Rahmenteil durch eine gestrichelte Linie, (b) Die Schnittgrößen sind in dargestellter Form als positiv festgelegt.

stem eingeführt. Die z -Achse zeigt dann zur gestrichelten Seite hin, die y -Achse von Tragwerksebene zum Beobachter hin. Somit ist auch die x -Achse festgelegt, wenn man die Rechtshandkonvention anwendet (Abb. 6.5).

6.2.2 Ermittlung der Schnittgrößenverläufe durch Gleichgewicht an der Schnittstelle

Unter dem Schnittgrößenverlauf ist die Änderung einer Schnittgröße zu verstehen, wenn man entlang der Längsachse eines Tragwerkselements fortläuft. Diese Änderung wird mathematisch durch eine Funktion von x -Koordinate angegeben. Die Schnittgrößenverläufe werden **M-, Q-, N-Linien** genannt, die man mit verschiedenen Methoden ermitteln kann. Die erste Methode besteht aus folgenden Schritten:

1. Ermittlung der Lagerreaktionen.
2. Einteilung des Tragwerks in Bereichen nach den anschließend angegebenen Kriterien.
3. Schneiden des Tragwerks in jedem Bereich an einer beliebigen Stelle (Koordinate x) und Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für das gesamte Tragwerksteil auf der linken oder auf der rechten Seite des Schnittes.
4. Bestimmung der $M(x)$, $Q(x)$ und $N(x)$ durch Neuordnung der Gleichgewichtsgleichungen.

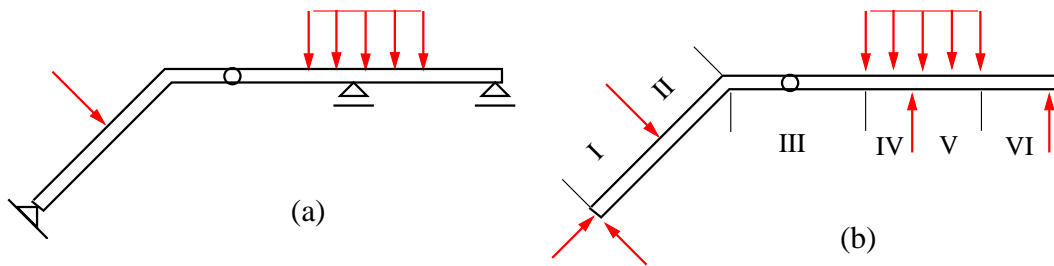


Abb. 6.6: (a) Rahmen unter Einzell- und Streckenlast, (b) Einteilung des Tragwerks in Bereiche anhand der Tragwerksgeometrie und der angreifenden Kräfte im Freikörperbild

Kriterien für die Einteilung eines Tragwerks in Bereiche: Ein neuer Bereich fängt dort an, wo

- die x-Achse des Tragwerks einen Knick bekommt oder das Tragwerk sich entzweigt, und
- wo es im Freikörperbild eine neue Last auftritt oder aufhört (im Falle einer Streckenlast).

Ein Beispiel für die Einteilung des Tragwerks in Bereichen zeigt die Abbildung 6.6.

Beispiel 6.2

6.2.3 Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößen

Zwischen der Streckenlast $q(x)$ und den Schnittgrößen M und Q bestehen Zusammenhänge, die wir durch die Betrachtung eines infinitesimalen Elements des Tragwerksteils unter der Streckenlast $q(x)$ bestimmen können (Abb. 6.7).

Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen :

$$\begin{aligned} \uparrow: \quad Q - q(x)dx - (Q + dQ) &= 0 \\ \frac{dQ}{dx} &= -q(x) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \circlearrowleft C: \quad -M - Qdx + q(x)dx \frac{dx}{2} + (M + dM) &= 0 \\ \frac{dM}{dx} &= Q \end{aligned} \quad (6.3)$$

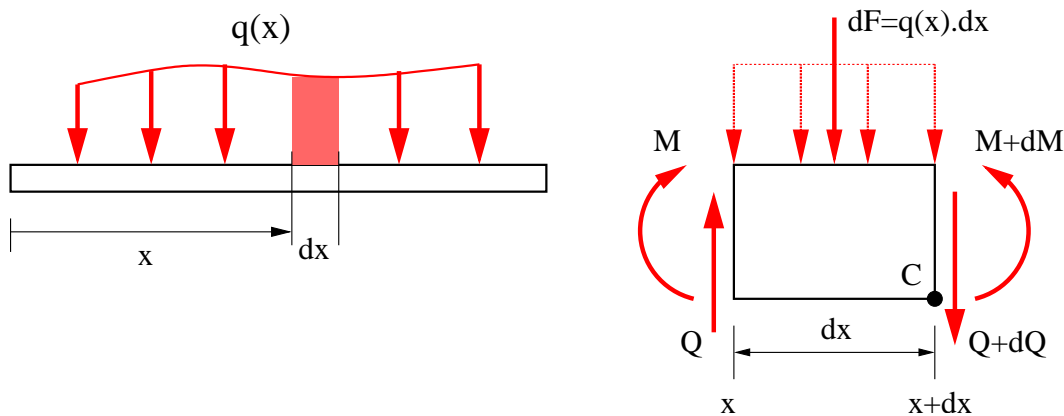


Abb. 6.7: Zusammenhang zwischen der Streckenlast und den Schnittgrößen Q und M .

Auf den quadratischen Term von dx in der Gl. 6.3 wurde verzichtet. Aus den Gln. 6.2 und 6.3 erhält man:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad (6.4)$$

Diese Zusammenhänge sind in der Tabelle 6.1 zusammengefasst. Aus dem Zusammenhang zwischen Streckenlast und Schnittgrößen Q und M lässt sich eine direkte Methode zur Bestimmung der M - und Q -Linien ableiten.

$q(x)$	$Q(x)$	$M(x)$
0	konst.	linear
konst.	linear	quadratische Parabel
linear	quadratische Parabel	kubische Parabel

Tabelle 6.1: Zusammenhang zwischen Streckenlast und Schnittgrößen

6.2.4 Ermittlung der Schnittgrößenverläufe durch bereichsweise Integration

Durch die Integration der Gleichungen 6.2 und 6.3 kann man die Schnittgrößen Q und M direkt aus der Belastung q ermitteln.

$$Q = - \int q dx + C_1 \quad (6.5)$$

$$M = \int Q dx + C_2 \quad (6.6)$$

Lagerungsart (s. Tab. 5.1)	Q	M
Gelenklager (Nr. 1, 2 u. 3)	$\neq 0$	0
Parallelführung (Nr. 6)	0	$\neq 0$
Schiebehülse (Nr. 7)	$\neq 0$	$\neq 0$
Einspannung (Nr. 8 u. 9)	$\neq 0$	$\neq 0$
freies Ende	0	0

Tabelle 6.2: Werte von M und Q an den Rändern des Tragwerks

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 sind aus zwei Rand- und/oder Übergangsbedingungen zu berechnen. Randbedingungen machen Aussagen über die Größe von M und Q an den Rändern eines Tragwerks. Übergangsbedingungen sind nur in Tragwerken mit mehr als einem Bereich vorhanden und müssen zur Bestimmung der Integrationskonstanten berücksichtigt werden. Sind es n Bereiche zu berücksichtigen, so ergeben sich bei der Integration der differentiellen Beziehungen $2n$ Integrationskonstanten. Sie sind aus $2n-2$ Übergangsbedingungen und 2 Randbedingungen zu bestimmen. Aus der Tabelle 6.2 können die Randbedingungen für verschiedene Lagerungsarten entnommen werden. Die Tabelle 6.3 fasst die Übergangsbedingungen an zwei benachbarten Bereichen, die durch angreifende Last getrennt wurden, zusammen.

Bei mehrteiligen Tragwerken tritt bei der Bestimmung der Integrationskonstanten eine Bedingung ($M = 0$ für Gelenk, $Q = 0$ für Quergelenk) an die Stelle einer Übergangsbedingung.

Die Lagerreaktionen sind zur Bestimmung von M - und Q -Linien bei dieser Methode nicht zu ermitteln. Sie können vielmehr aus den Ergebnissen

Last			
Q	Sprung $Q_{II}(a) = Q_I(a) - F$	Knick $Q_{II}(a) = Q_I(a)$	— $Q_{II}(a) = Q_I(a)$
M	Knick $M_{II}(a) = M_I(a)$	— $M_{II}(a) = M_I(a)$	Sprung $M_{II}(a) = M_I(a) - M_0$

Tabelle 6.3: Übergangsbedingungen zwischen zwei Bereichen getrennt durch eine Laständerung

abgelesen werden.

Beispiel 6.3

6.2.5 Punktweise Ermittlung der Schnittgrößenverläufe

In vielen Fällen ist es hinreichend, die Schnittgrößen nur an ausgezeichneten Stellen des Tragwerkes zu berechnen. Die berechneten Punkte der Schnittgrößenverläufe werden anschließend durch Ausnutzung der Beziehungen zwischen Belastung und den Schnittgrößen (Tabelle 6.1) mit den entsprechenden Kurven verbunden. So hat man zwischen den ausgezeichneten Stellen nur qualitative Aussagen. Die ausgezeichneten Stellen sind Anfangs- und Endpunkte der Bereiche, die man nach den Kriterien im Abschnitt 6.2.2 festlegt. Verbindungspunkte in mehrteiligen Tragwerken dienen auch als ausgezeichnete Stellen.

Bei dieser Methode ist die Bestimmung der Lagerreaktionen notwendig.

Beispiel 6.4

Teil II

Elastostatik

Einleitung

In der Statik haben wir in Wirklichkeit verformbare Körper als starr angenommen. Der Verzicht auf Verformbarkeit ist für die Berechnung der Lagerreaktionen und Schnittgrößen erlaubt, solange die tatsächlichen Verformungen der Körper (relativ zu Körperabmessungen) klein bleiben. Oft wird auch die Verformung bei der Auslegung der Bauelemente oder Tragsysteme maßgebend, wie z.B. die Durchbiegung der Balken oder Maschinenwellen. Darüber hinaus ist die Berechnung der Lagerreaktionen allein mit den Gleichgewichtsbedingungen (Statik) nur für statisch bestimmte Systeme möglich. Bei statisch unbestimmten Systemen muss die Verformung der Körper mitberücksichtigt werden.

Im Vergleich zur Statik müssen in der Elastostatik zwei neue Arten von Gleichungen zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen berücksichtigt werden. Dies sind zum einen **kinematische Beziehungen**, die den Zusammenhang zwischen Verformung und Verschiebung beschreiben, und zum anderen das **Stoffgesetz**, das die Verformung mit der **Spannung** in Beziehung setzt. Spannung ist eine Größe, die die Intensität der Beanspruchung im Material darstellt. Sie hat die Einheit *Kraft pro Einheitsfläche* und wirkt auf jede Schnittfläche, die man im Gedanken in einen belasteten Bauteil einlegt.

Wir werden hier nur die statisch bestimmten Systeme betrachten und uns dabei auf Stäbe unter axialer Belastung bzw. Torsion und Balken unter Biegung konzentrieren.

Kapitel 7

Elastostatik des geraden Stabes

7.1 Stab unter axialer Belastung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Beanspruchung und der Verformung von elastischen Stäben, die nur in ihrer Längsrichtung auf Zug oder Druck beansprucht werden. Die Voraussetzung für reine Zug- oder Druckbeanspruchung ist, dass die Wirkungslinie der Kraft durch die Schwerpunkte aller Querschnittsflächen des Stabes geht. Mit anderen Worten muss die Wirkungslinie der Kraft mit der Stabachse (Verbindungsline der Schwerpunkte) zusammenfallen. Diese Voraussetzung nehmen wir hier als stets erfüllt an.

7.1.1 Spannung

Betrachten wir nun einen Stab mit einer konstanten Querschnittsfläche A , der an seinen Enden mit der Zugkraft F (vom Stabinneren nach außen) belastet wird. Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass etwas entfernt von der Lasteinleitungsstelle alle Teilflächen eines Querschnitts sich gleichermaßen an der Übertragung der Last beteiligen. D. h. die inneren Kräfte sind gleichmäßig über der Querschnittsfläche des Stabes verteilt. Wenn wir nun an einer solchen Stelle einen Gedankenschnitt im Stab legen, bekommen wir auf jeder Seite des Schnittes eine konstante Flächenlast, deren Intensität gleich innere Kräfte pro Einheitsfläche ist und **Spannung** genannt wird und ihr Integral über die Schnittfläche der Schnittgröße N

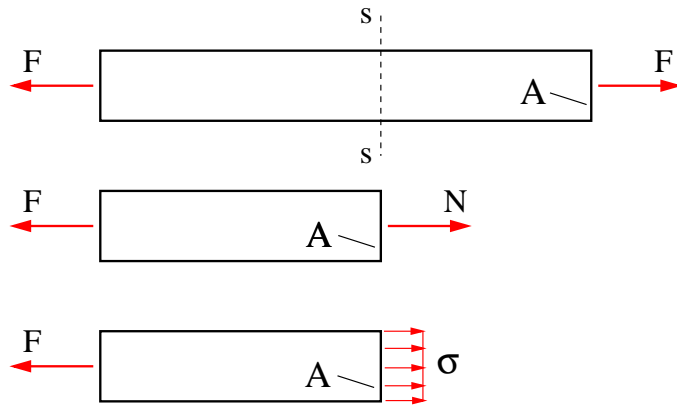


Abb. 7.1: Spannungen am geraden Schnitt im Stab unter axialer Zugbelastung: $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}$.

entspricht (Abb. 7.1).

$$\int_A \sigma dA = N \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}. \quad (7.1)$$

Bildet der Gerdankenschnitt einen Winkel mit der Stabachse, dann kann man die Spannungen in zwei Komponenten aufteilen, die zur Schnittfläche normal bzw. tangential sind und entsprechend die Normalspannung σ und die Schubspannung τ auf der Schnittfläche genannt werden. Aus den Gleichgewichtsbedingungen für einen Stabteil erhält man (Abb. 7.2)

$$\rightarrow : \quad \sigma A^* \cos \varphi + \tau A^* \sin \varphi - F = 0 \quad (7.2)$$

$$\uparrow : \quad \sigma A^* \sin \varphi + \tau A^* \cos \varphi = 0. \quad (7.3)$$

Mit $A^* = \frac{A}{\cos \varphi}$ ergeben sich diese Gleichungen zu

$$\sigma + \tau \tan \varphi = \frac{F}{A} \quad (7.4)$$

$$\sigma \tan \varphi - \tau = 0. \quad (7.5)$$

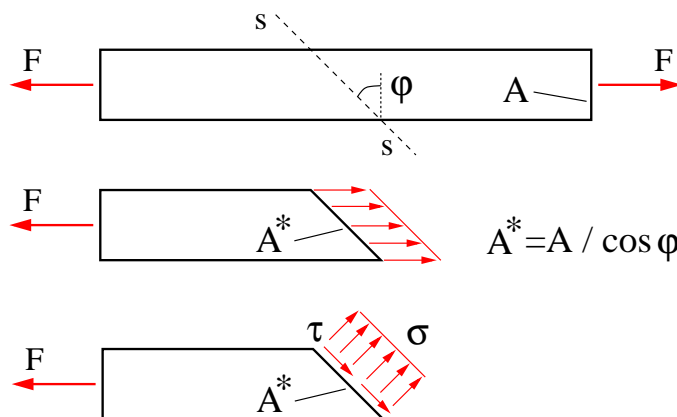


Abb. 7.2: Spannungen am beliebigen Schnitt im Stab unter axialer Zugbelastung: $\sigma = \frac{F}{A}(1 + \cos 2\varphi)$, $\tau = \frac{F}{2A} \sin 2\varphi$.

Auflösen nach σ und τ mit anschließend einiger trigonometrischen Umrechnungen ergeben:

$$\sigma = \frac{F}{A}(1 + \cos 2\varphi) \quad (7.6)$$

$$\tau = \frac{F}{2A} \sin 2\varphi. \quad (7.7)$$

Für $\varphi = 0$ erreicht die Normalspannung σ ihren maximalen Wert $\sigma_{max} = \frac{F}{A}$, der der Spannung im geraden Schnitt entspricht. Mit $\varphi = \frac{\pi}{4}$ erreicht die Schubspannung ihren maximalen Wert $\tau_{max} = \frac{F}{2A}$.

Die Spannungen sind nicht immer über die Stablänge konstant. Eine leichte Änderung des Stabquerschnitts oder eine Änderung der Belastung entlang der Stabachse (z.B. bei der Wirkung der Volumenkräfte) macht aus Spannungen eine Funktion von der x -Koordinate des Stabes. Im Allgemeinen gilt (s. Abb. 7.3):

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \quad (7.8)$$

Kraftfluss und Spannungsverteilung:

Man kann sich gedanklich vorstellen, dass die Übertragung der Last von einer Stelle im Bauteil zu der anderen Stelle durch das Fließen der inneren Kräfte stattfindet. Der Kräftefluss hat nicht immer ein ungestörtes glattes Bett und wird besonders stark durch Querschnittsänderungen beeinflusst. Wo der Kräftefluss durch Änderungen im Querschnitt wie rasche Vergrößerung oder Verkleinerung, Loch oder Kerbe gestört wird, trifft die Annahme

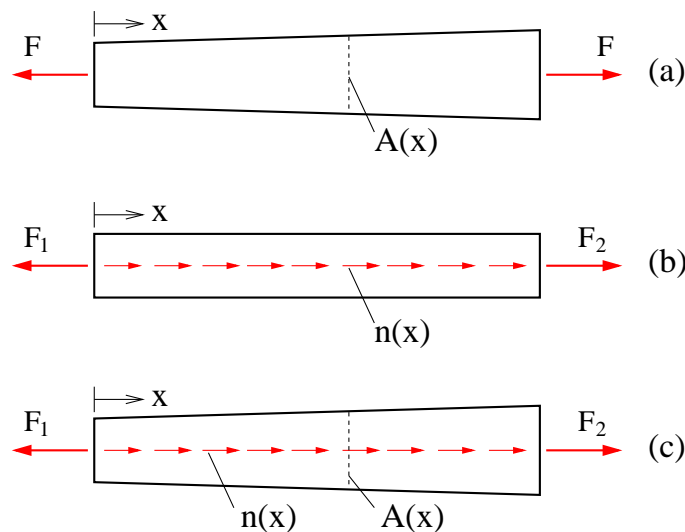


Abb. 7.3: a) Spannung im Stab (a) Querschnittsfläche leicht veränderlich, Last konstant; $\sigma(x) = \frac{N}{A(x)}$, (b) Querschnittsfläche konstant, Last veränderlich; $\sigma(x) = \frac{N(x)}{A}$, (c) beide Querschnittsfläche und Last veränderlich; $\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$.

einer gleichmäßigen Verteilung der Spannung nicht mehr zu. Am Ort der Störung treten Spannungsspitzen auf und Spannungsverteilung kann mit der elementaren Theorie für den Zugstab nicht erfasst werden.

Zulässige Spannungen; σ_{zul}, τ_{zul}

Die zulässigen Spannungen sind vorgegebene Spannungswerte, die für ein bestimmtes Material unter Last nicht überschritten werden dürfen. Bei der Festlegung der zulässigen Spannungen gehen nicht nur die Werkstoffspezifischen Eigenschaften des Materials ein, sondern auch Sicherheitsaspekten, die eine sichere Anwendung des Bauteils unter der Gebrauchlast gewährleisten. Für einen homogenen Stab muss die Querschnittsfläche so gewählt werden, dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$|\sigma| \leq \sigma_{zul} \quad (7.9)$$

Die erforderliche Querschnittsfläche lässt sich entsprechend durch

$$A_{erf} = \frac{|N|}{\sigma_{zul}} \quad (7.10)$$

rechnen. Die Schubspannung wird dann kontrolliert, wenn es explizit gefordert wird. Da die Schubspannung höchstens die Hälfte der Normalspannung erreichen kann (s. Gl. 7.6 und 7.7), wird eine Kontrolle erst dann nötig, wenn es gilt: $\tau_{zul} < 0,5\sigma_{zul}$, was für homogene Werkstoffe in der Regel nicht der Fall ist.

Beispiel 7.1

7.1.2 Dehnung

In der Einleitung wurde über einen Zusammenhang zwischen der Verschiebung und Verformung im Körper gesprochen. Dieser Zusammenhang (*kinematische Beziehung*) kann für einen Stab anhand der Abbildung 7.3 dargestellt werden. Durch die Zugkraft F erfährt der Stab eine gesamte Längenänderung Δl , die man als Verschiebung des rechten Endes betrachten kann, wenn man das linke Ende festhält. Wenn man die Verformung (hier **Dehnung**) über die Gesamtlänge des Stabes gleichmäßig verteilt annehmen kann, wird ein Maß für die Dehnung das Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge des Stabes sein:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (7.11)$$

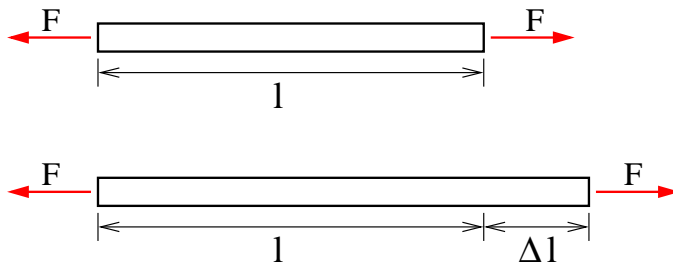


Abb. 7.4: Dehnung eines geraden Stabes unter axialer Belastung ergibt sich aus dem Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, Voraussetzung dafür ist eine gleichmäßige Verformung des Stabes.

Die Dehnung ist eine *dimensionslose* Größe, da Längenänderung und Ausgangslänge beide die gleiche Dimension (Länge) haben. Daher wird häufig ε in Prozent ausgedrückt.

Für den allgemeinen Fall, wo man nicht von einer gleichmäßigen Verteilung der Verformungen ausgehen kann (z.B. bei veränderlicher Querschnittsfläche oder Last), betrachtet man die Verformung und die Verschiebung eines *infinitesimalen Stabelementes* mit der Ausgangslänge dx (Abb. 7.5). Die neue Länge des infinitesimalen Stabelementes ist nach der Belastung gleich $dx + du$, wobei du sich aus der Differenz der Verschiebungen an den beiden Stabenden ergibt. Somit erhält man für das Stabelement die folgende *kinematische Beziehung* :

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (7.12)$$

Die Dehnung erhält man also durch Ableiten der Verschiebungsfunktion $u = u(x)$ nach der Stabkoordinate x .

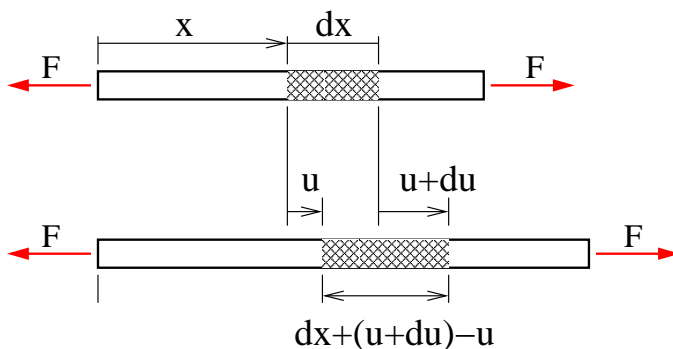


Abb. 7.5: Die Dehnung eines infinitesimalen Stabelementes unter axialer Belastung ergibt sich im allgemeinen Fall aus $\varepsilon = \frac{du}{dx}$, wobei dx die Ausgangslänge und du die Längenänderung ist.

7.1.3 Stoffgesetz

Zwischen der Spannung (Kraftgröße) und der Dehnung (kinematische Größe) besteht ein Zusammenhang, der **Stoffgesetz** genannt wird und aus experimenteller Untersuchung des Materialverhaltens unter Belastung gewonnen wird. Das einfachste Experiment zur Bestimmung der Beziehung zwischen Spannung und Dehnung ist der Zugversuch am geraden Stab, wobei man eine stabförmige Probe mit Zugkraft belastet und während der Belastung ständig die Längenänderung der Probe innerhalb eines markierten Bereiches mit einer genau bekannten Anfangslänge misst. Der Versuch wird oft bis zum Versagen der Probe unter Last durchgeführt. Wenn die Spannung gegenüber der Dehnung aufgezeichnet wird, erhält man oft eine hochgradige nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Für metallische Werkstoffe ist der Anfangsbereich der $\sigma - \varepsilon$ -Kurve eine *Linie*, die darauf hinweist, dass in diesem Bereich die Spannung proportional zur Dehnung ist (Abb. 7.1.3). Da in diesem Bereich mit Wegnahme der Belastung sämtliche Dehnungen verschwinden, nennt man das Materialverhalten **linear-elastisch**. Der *Proportionalitätsfaktor* E im linear-elastischen Bereich ist ein Materialparameter und wird der **Elastizitätsmodul** genannt. Elastizitätsmodul von einigen metallischen Werkstoffen sind in der Tabelle 7.1 zu finden. Das linear-elastische Stoffgesetz heißt nach Hooke (1635-1703) das **Hooke'sche Gesetz** und wird wie folgt geschrieben:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (7.13)$$

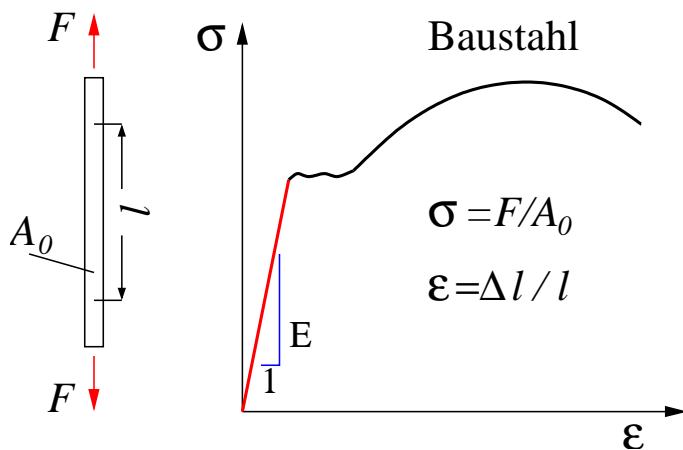


Abb. 7.6: Das Stoffgesetz (Spannungs-Dehnungs-Beziehung) ist für die metallischen Werkstoffe bis gewisser Dehnung linear. In diesem Bereich ist das Werkstoffverhalten elastisch (reversible Dehnungen). Das linear-elastische Stoffgesetz wird auch Hooke'sches Gesetz genannt: $\sigma = E\varepsilon$, E heißt Elastizitätsmodul

Werkstoff	$E [N/mm^2]$	$\alpha_T [1/K]$
Stahl	$2,1 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	$1,2 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
Messing	$1,0 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	$0,7 \cdot 10^5$	$2,3 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 7.1: Elastizitätsmodul E und Wärmeausdehnungskoeffizient α_T einiger metallischen Werkstoffe.

7.1.4 Einfluss der Temperatur

Zusätzlich zu den Verformungen aus der Belastung, führt eine Temperaturänderung in einem Bauteil zu Verformungen des Bauteils, wenn diese durch feste Randbedingungen nicht verhindert werden. Die Verformung ε_T infolge einer Temperaturänderung ΔT ist proportional zu ΔT . Der Proportionalitätsfaktor α_T ist ein Werkstoffparameter, der **Wärmeausdehnungskoeffizient** heißt und die Dimension $[1/K]$ hat. Der Wärmeausdehnungskoeffizient für einige metallische Werkstoffe sind in der Tabelle 7.1 gegeben.

Bezeichnet man die Dehnung infolge der Spannung σ mit ε_M und die infolge der Temperaturänderung ΔT mit ε_T , so ergibt sich die Gesamtdehnung aus $\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_T$, wenn beide Wirkungen gleichzeitig vorhanden sind. Es gilt dann

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T \quad (7.14)$$

Für die Spannung σ erhält man damit $\sigma = E(\varepsilon - \alpha_T \Delta T)$.

7.1.5 Gleichgewicht am infinitesimalen Stabelement

Bis jetzt haben wir die Gleichgewichtsbedingungen entweder an dem gesamten Stab oder an einem Stabteil aufgestellt. Die Betrachtung des Gleichgewichts an einem infinitesimalen Stabelement bietet einen alternativen Weg, der gemeinsam mit der kinematischen Beziehung und dem Stoffgesetz zu Grundgleichungen des elastischen Stabes führen. Wir schreiben nun die Gleichgewichtsbedingung an einem infinitesimalen Stabelement, das mit einer Streckenlast $n(x) = n$ in Längsrichtung belastet ist (s. Abb. 7.7)

$$\rightarrow: \quad -N + ndx + N + dN = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dx} + n = 0 \quad (7.15)$$

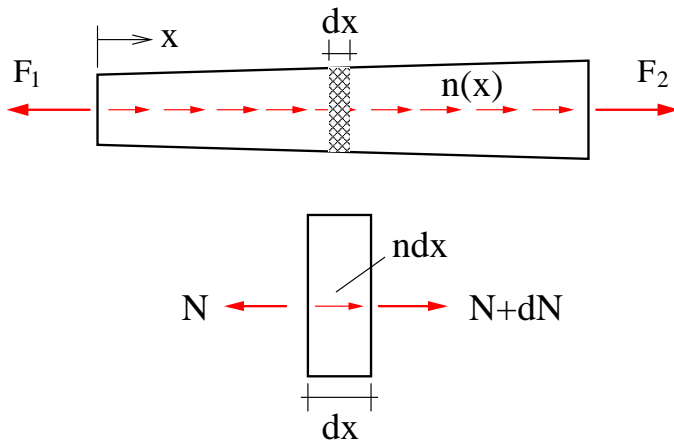


Abb. 7.7: Infinitesimales elastisches Stabelement mit Streckenlast. Die Gleichgewichtsbedingung an diesem Element liefert gemeinsam mit der kinematischen Beziehung und dem Stoffgesetz die Grundgleichung des elastischen Stabes.

Mit $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ und $\sigma = \frac{N}{A}$ erhält man aus der Gl. 7.14:

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T \quad (7.16)$$

Diese Beziehung ist das *Elastizitätsgesetz für den Stab*.

Für die Berechnung der Verformung an beliebiger Stelle x gilt:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \Rightarrow \int_0^x du = \int_0^x \varepsilon d\bar{x} \Rightarrow u(x) - u(0) = \int_0^x \varepsilon d\bar{x} \quad (7.17)$$

Für den gesamten Stab erhält man: $\Delta l = u(l) - u(0) = \int_0^l \varepsilon dx$.

Mit $\Delta T = 0$ ergibt sich:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} dx \quad (7.18)$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \quad \text{für } n = 0 \quad (7.19)$$

7.1.6 Grundgleichung des elastischen Stabes

Aus dem Elastizitätsgesetz des elastischen Stabes (Gl. 7.16) erhält man mit $\frac{du}{dx} = u'$

$$EAu' = N + EA\alpha_T \Delta T \quad (7.20)$$

Die Ableitung von 7.20 nach x ergibt:

$$N' = (EAu')' - (EA\alpha_T \Delta T)' \quad (7.21)$$

wobei $N' = \frac{dN}{dx}$. Setzt man 7.21 in 7.15 ein, erhält man

$$(EAu')' - (EA\alpha_T\Delta T)' + n = 0. \quad (7.22)$$

Mit $EA = konst.$ und $\Delta T = konst.$ ergibt sich diese Gleichung zu

$$n = -EAu''. \quad (7.23)$$

Beispiel 7.2

7.2 Superposition

Das Prinzip von Superposition wird oft zur Bestimmung der Spannungen und Verformungen in einem Tragwerk benützt, das unter komplexer Belastung steht. Unter *Aufteilung der Belastung* sagt dieses Prinzip aus, dass die resultierenden Spannungen und Verformungen an einem Punkt sich durch Bestimmung der Spannungen und Verformungen unter der Wirkung *einzelner Lastkomponente* bestimmen lassen. Die Resultierenden ergeben sich dann aus der algebraischen Summe der einzelnen Teilergebnissen. Um dieses Prinzip anwenden zu können, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

1. Lineare Beziehung zwischen der Last und der Verformung (*matrielle Linearität*), wie z. B. $\Delta l = \frac{Fl}{EA}$ oder $\sigma = E\varepsilon$.
2. Eine erhebliche Änderung der ursprünglichen Bauteilgeometrie darf durch die Belastung nicht eintreten (kleine Verformungen; *geometrische Linearität*). Mit dieser Bedingung bleibt die Änderung der Lage und Richtung der Belastung vernachlässigbar klein (Abb. 7.8).

Die zweite Bedingung findet ihre Anwendung bei Bauteilen, die quer zu ihrer Längsachse belastet werden oder bei schlanken Tragwerken, die unter achsialer Druckbelastung zum Knicken gefährdet sind. In diesem Fall ist das Aufaddieren der Lastanteile nur bis zu der Summe erlaubt, die unter der kritischen Last (Knicklast) liegt, obwohl das Materialverhalten noch elastisch ist. Die Berechnung der kritischen Last ist Aufgabe der elastischen Stabilitätstheorie.

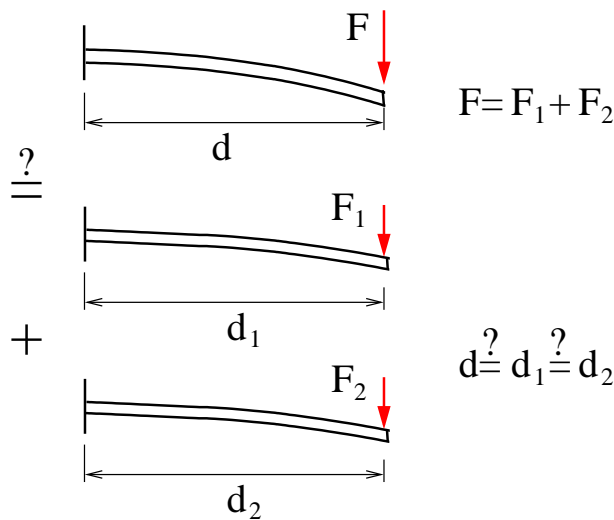


Abb. 7.8: Für kleine Verformungen ($d = d_1 = d_2$) ist die Superposition erlaubt, denn es gilt $Fd = F_1d_1 + F_2d_2$. Bei großen Verformungen ($d \neq d_1 \neq d_2$) erhält man $Fd \neq F_1d_1 + F_2d_2$, d. h. die zweite Voraussetzung für Superposition ist nicht erfüllt.

7.3 Statisch unbestimmte Stabwerke

Zuerst betrachten wir den statisch unbestimmten Einzelstab. Wenn ein Stab an beiden Enden eingespannt ist und irgendwo zwischen den beiden Enden axial belastet wird, lassen sich die zwei Lagerreaktionen im Allgemeinen nicht allein durch Gleichgewichtsbedingung bestimmen (eine Gl. $\sum F_x = 0$ und 2 Unbekannte R_A und R_B). In diesem Fall ist der Stab statisch unbestimmt. Eine zweite Gleichung soll man aus der *kinematischen Bedingung* (auch *Kompatibilitätsbedingung* genannt) aufstellen. In der Kompatibilitätsbedingung werden die *Last-Verformungs-Beziehung* von jedem Stabteil berücksichtigt. So werden die axialen Kräfte der beiden Bereiche über eine neue Gleichung miteinander verknüpft, was die Lösung des Problems ermöglicht. Die Kompatibilitätsbedingung für einen solchen Stab mit zwei Bereichen lautet

$$\delta_{AB} = \delta_1 + \delta_2 = 0, \quad (7.24)$$

die durch Nutzung des Elastizitätsgesetzes ergibt:

$$\frac{N_1 L_1}{EA} + \frac{N_2 L_2}{EA} = 0 \quad (7.25)$$

Es gibt auch andere Fälle der Belastung, die zwar keine verschiedene Lagerreaktionen bei einem beidseitig eingespannten Stab hervorrufen, aber ein statisch unbestimmtes Problem darstellen. Bekannte Beispiele aus diesem Bereich sind Stäbe, die bereichsweise unterschiedlicher thermischer

Belastung unterworfen sind, oder Stäbe, die stückweise aus unterschiedlichen Materialien zusammengesetzt wurden und thermisch belastet werden. In solchen Fällen ist die durch thermische Belastung entstandene axiale Kraft überall gleich aber vorerst unbekannt. Weitere Unbekannten sind die Verformungen der einzelnen Bereiche, die mit der Kompatibilitätsbedingung

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = 0 \quad (7.26)$$

miteinander verknüpft sind. Weitere Gleichungen erhält man durch Elastizitätsgesetz für den Stab. Für den Stab aus mehreren Materialien unter thermischer Belastung ohne äußere Last oder mit äußerer Last, die die Bedingung $N = konst$ überall erfüllt, kann man schreiben:

$$\frac{L_1}{E_1 A_2} = \dots = \frac{L_i}{E_i A_i} = \dots = \frac{L_n}{E_n A_n} \quad (7.27)$$

Mit diesen Gleichungen lässt sich die Gl. 7.26 in eine Gleichung mit nur einer Unbekannte δ_i umschreiben und lösen. Mit δ_i erhält man dann die Schnittkraft $N = \frac{\delta_i}{L_i} E_i A_i$ und damit lassen sich alle Spannungen und Verformungen berechnen.

Das Verfahren ist für statisch unbestimmte Systeme aus mehreren Stäben identisch. Die Verknüpfung der Verformungen einzelner Stäbe ergibt sich im Allgemeinen aus der Bedingung, dass die Verformungen geometrisch miteinander kompatibel sein müssen.

Beispiel 7.3

Kapitel 8

Biegung des geraden Balkens

8.1 Einleitung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Beanspruchung und der Verformung von elastischen geraden Balken, die aus geometrischer Sicht wie die Stäbe sind. Balken werden jedoch hauptsächlich senkrecht zu ihrer Längsachsen belastet und deformieren sich in Form einer Biegung um die Achse, die senkrecht zur Belastungsebene steht. Hier betrachten wir nur Balken, die unter solcher Beanspruchung stehen und in jedem beliebigen Schnitt nur Q und M als Resultierende der inneren Kräfte aufweisen (s. Abb. 8.1). Nun wollen wir mit Hilfe der Elastostatik Gleichungen aufstellen, die die Berechnung der Verformungen und Spannungen im Biegebalken ermöglichen.

Zunächst betrachten wir einen Balkenquerschnitt unter *reiner Biegung* ($Q = 0$). In diesem Fall, wie später gezeigt wird, sind die inneren Kräfte - Spannungen - linear über dem Querschnitt verteilt (Abb. 8.1). Zusätzlich nehmen wir an, dass der Querschnitt eine Symmetrieachse hat, die auf der Belastungsebene liegt. Das Koordinatensystem legen wir so fest, dass die x -Achse mit der Balkenachse zusammenfällt (d. h. durch die Mittelpunkte, S , aller Querschnittsflächen geht) und die z -Achse nach unten zeigt und zugleich die Symmetrieachse der Querschnittsfläche ist. Die y -Achse ist zur Belastungsebene normal und bildet mit den x - und y -Achsen ein Rechtshandsystem (s. Abb. 8.2). Die Normalspannung an jedem Punkt auf dem Querschnitt erhält man wegen ihrer linearen Verteilung durch

$$\sigma(z) = cz. \quad (8.1)$$

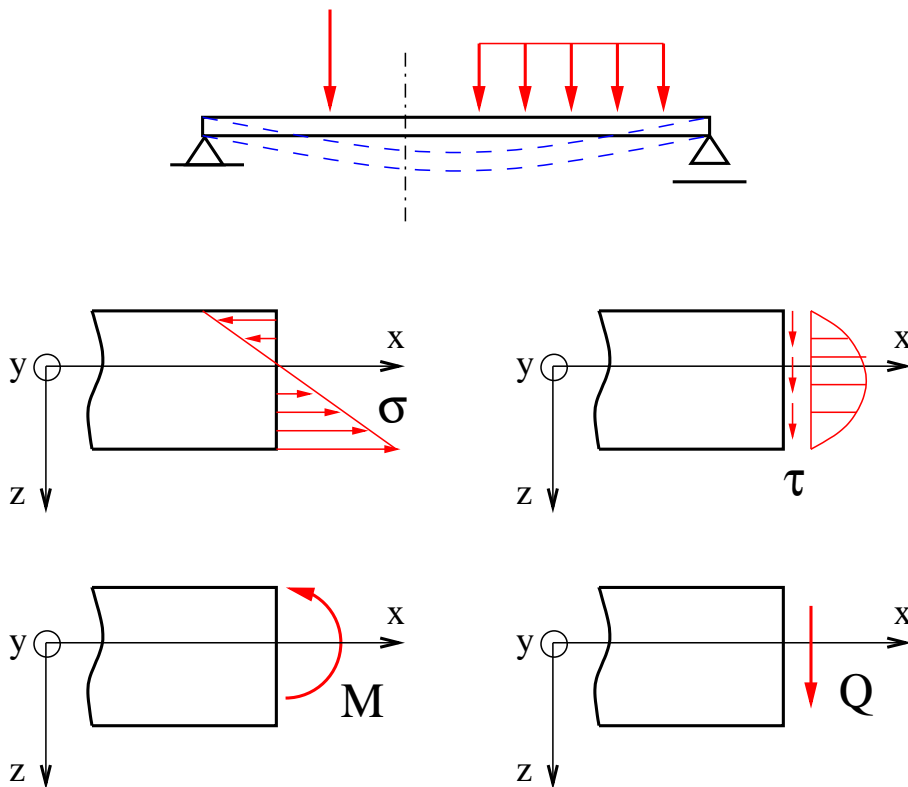


Abb. 8.1: Spannungen im Balkenquerschnitt unter Beanspruchung durch Moment M und Querkraft Q als Resultierende der inneren Kräfte (Normalspannungen σ und Schubspannungen τ).

Betrachtet auf einer infinitesimalen Fläche dA bildet die Spannung eine infinitesimale Kraft $dF = \sigma dA$, die um die y -Achse ein infinitesimales Moment $dM = z dF = \sigma z dA$ erzeugt (Abb. 8.2). Das Integrale aller infinitesimalen Momente um die y -Achse ist der Resultierende M gleich;

$$M = \int \sigma z dA \quad (8.2)$$

Mit $\sigma(z) = cz$ erhält man

$$M = c \int z^2 dA. \quad (8.3)$$

Führen wir $I = \int z^2 dA$ ein, so ergibt sich $M = cI$, wobei I eine rein *geometrische Größe* ist, die nur von den Querschnittsabmessungen abhängt und *Flächenträgheitsmoment* genannt wird. Die Gl. 8.1 ergibt sich nun zu

$$\sigma = \frac{M}{I} z, \quad (8.4)$$

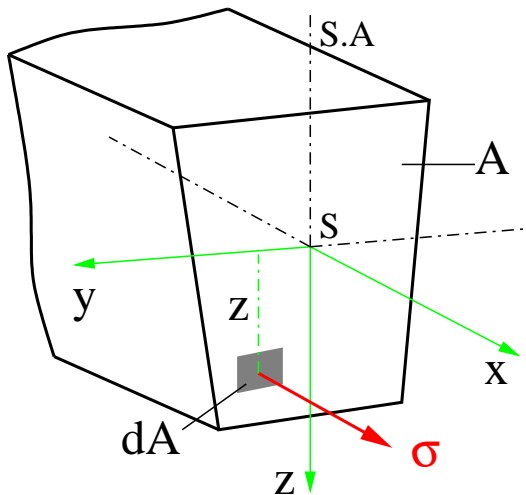


Abb. 8.2: Querschnitt eines Balkens mit einer Symmetrieachse auf der Belastungsebene (hier x - z -ebene) und das eingeführte Koordinatensystem.

Diese Gleichung zeigt, dass die Spannung an jedem Punkt auf dem Querschnitt proportional zur Schnittgröße M und zum Abstand z von der y -Achse und antiproportional zum Flächenträgheitsmoment I ist. Wegen der wesentlichen Rolle des Flächenträgheitsmoments bei der Balkenbiegung beschäftigen wir uns zunächst eingehender mit dessen Eigenschaften.

8.2 Flächenträgheitsmomente

In der Statik haben wir bei der Berechnung der Koordinaten des Schwerpunktes einer Fläche die Terme $\int y dA$ und $\int z dA$ als statische Momente der betrachteten Fläche um die z - bzw. y -Achse bezeichnet (S_z bzw. S_y), wobei y und z die Abstände zwischen einem Flächenelement dA und der z - bzw. y -Achse (Abb.8.3) darstellten. Bildet man nun Flächenintegrale, die diese Abstände in zweiter Potenz oder als Produkt enthalten, bezeichnet man sie als **Flächenträgheitsmomente** oder *Flächenmomente zweiter Ordnung*. Sie werden wie folgt definiert:

$$I_y = \int z^2 dA, \quad I_z = \int y^2 dA \quad (8.5)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \int yz dA \quad (8.6)$$

$$I_p = \int r^2 dA = \int (z^2 + y^2) dA = I_y + I_z \quad (8.7)$$

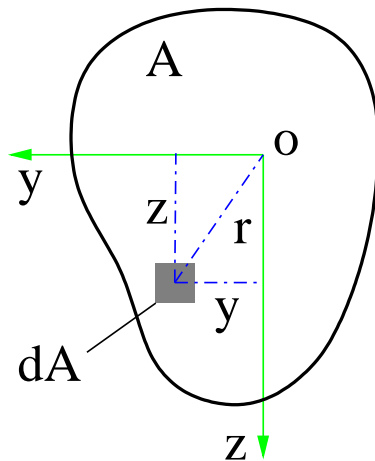


Abb. 8.3: Beliebige Fläche als Querschnitt eines Balkens zur Definition von Flächenmomenten erster und zweiter Ordnung (statische Momente und Flächenträgheitsmomente). Koordinatenursprung "o" liegt an beliebiger Stelle auf A.

Flächenträgheitsmomente haben die Dimension $[Länge^4]$, z. B. cm^4 . Man nennt I_y bzw. I_z das *axiale Flächenträgheitsmoment* bezüglich der y - bzw. der z -Achse, I_{yz} das *Deviationsmoment* oder *Zentrifugalmoment* und I_p das *polare Flächenträgheitsmoment*.

Während I_y , I_z und I_p stets positiv sind, kann I_{yz} positiv, negativ oder Null werden. Der Fall $I_{yz} = 0$ tritt ein, wenn die Fläche eine Symmetrieachse aufweist, was das Integral $\int yz dA$ verschwinden lässt (Abb. 8.4a).

Die Flächenträgheitsmomente einer Fläche kann man durch Summation von Trägheitsmomenten der Teilflächen bilden (Abb. 8.4b):

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{A_1} z^2 dA + \int_{A_2} z^2 dA + \dots = \sum I_{y_i} \quad (8.8)$$

Analog erhält man:

$$I_z = \sum I_{z_i}, \quad I_{yz} = \sum I_{(yz)_i}. \quad (8.9)$$

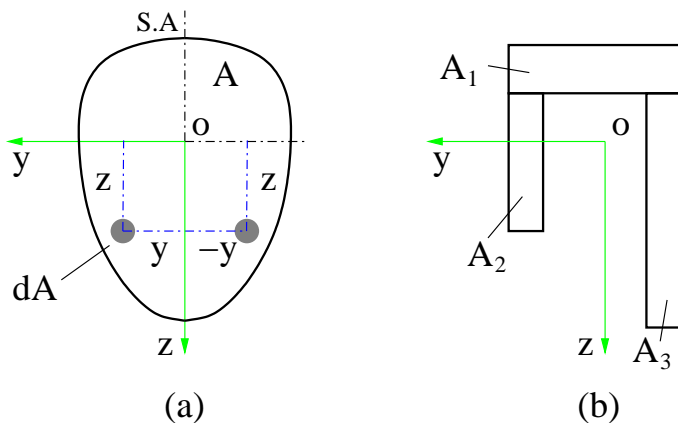


Abb. 8.4: (a) Für eine Fläche mit einer Symmetrieachse ist die Deviationsträgheitsmoment gleich Null. (b) Trägheitsmomente einer Fläche lassen sich durch Summation von Trägheitsmomenten der Teilflächen berechnen.

Diese Vorgehensweise ist besonders effektiv, wenn die Trägheitsmomente der Teilflächen um ihre Schwerachsen bekannt sind und nur der Einfluss von Transformation der Bezugsachsen zu berücksichtigen sind.

Beispiel 8.1

8.2.1 Transformation der Bezugsachsen

Flächenträgheitsmomente sind von der Lage und Orientierung der Bezugsachsen abhängig. Da jede Transformation der Bezugsachsen in der Ebene in eine Parallelverschiebung (Translation) und eine Drehung teilbar ist, betrachten wir diese getrennt.

Parallelverschiebung: Wir betrachten die parallelen Bezugssysteme (y, z) und (\bar{y}, \bar{z}) in Abbildung 8.5, wobei vorausgesetzt wird, dass y und z die Schwerachsen der Fläche A sind (diese Voraussetzung ist nicht unbedingt notwendig, hier jedoch zweckmäßig).

Für jeden Punkt auf A gilt:

$$\bar{y} = y + \bar{y}_s, \quad \bar{z} = z + \bar{z}_s. \quad (8.10)$$

Trägheitsmomente bezüglich \bar{y} und \bar{z} ergeben sich aus

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= \int (z + \bar{z}_s)^2 dA = \int z^2 dA + 2\bar{z}_s \int z dA + \bar{z}_s^2 \int dA \\ I_{\bar{z}} &= \int (y + \bar{y}_s)^2 dA = \int y^2 dA + 2\bar{y}_s \int y dA + \bar{y}_s^2 \int dA \\ I_{\bar{y}\bar{z}} &= - \int yz dA - \bar{y}_s \int z dA - \bar{z}_s \int y dA - \bar{y}_s \bar{z}_s \int dA \end{aligned} \quad (8.11)$$

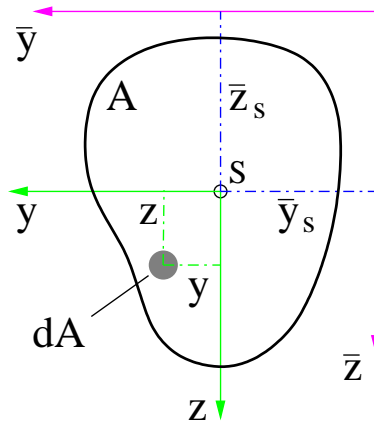


Abb. 8.5: Es bestehen Zusammenhänge zwischen den parallelverschobenen Bezugsachsen. Der steiner'sche Satz beschreibt diese Zusammenhänge, wenn ein Bezugssystem die Schwerachsen der Fläche darstellt.

Die statische Momente verschwinden um die Schwerachse, d. h. $\int y dA = 0$ und $\int z dA = 0$. Die Gln. 8.11 ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= I_y + \bar{z}_s^2 A \\ I_{\bar{z}} &= I_z + \bar{y}_s^2 A \\ I_{\bar{y}\bar{z}} &= I_{yz} - \bar{y}_s \bar{z}_s A. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Die Gln. 8.12 nennt man der **Steiner'sche Satz**. Da die Terme $\bar{z}_s^2 A$ und $\bar{y}_s^2 A$ nur positiv oder Null sein können, stellen I_y und I_z die kleinsten Werte dar, die die axialen Flächenträgheitsmomente annehmen können. Die Bedeutung der Flächenträgheitsmomente bezogen auf die Schwerachsen (I_y und I_z) kommt daher, dass die Normalspannungen, die auf den Querschnitt auftreten, nur bezogen auf diese Achsen ihre Extremalwerte erreichen. Aus $\sigma = \frac{M}{I} z$ erkennt man, dass die absolut größte Spannung in größter Entfernung zur y -Achse bei $z = z_{max}$ auftritt.

Beispiel 8.2

Drehung : Wir betrachten nun die Bezugssysteme (η, ζ) und (y, z) , die einen gemeinsamen Ursprung haben und gegeneinander um den Winkel φ gedreht sind (Abb. 8.6). Jeder Punkt im η, ζ -System lässt sich durch y, z -Koordinaten wie folgt beschreiben:

$$\eta = y \cos \varphi + z \sin \varphi, \quad \zeta = -y \sin \varphi + z \cos \varphi. \quad (8.13)$$

Die Flächenträgheitsmomente bezüglich η, ζ -Achsensystem, I_η, I_ζ und $I_{\eta\zeta}$, ergeben sich mit Berücksichtigung der Gln. 8.13 zu:

$$I_\eta = \int \zeta^2 dA, \quad I_\zeta = \int \eta^2 dA, \quad I_{\eta\zeta} = - \int \eta \zeta dA$$

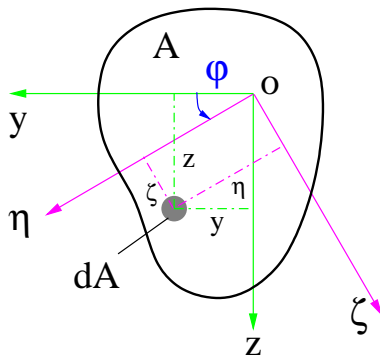


Abb. 8.6: Es bestehen Zusammenhänge zwischen den Flächenträgheitsmomenten bezogen auf gegeneinander gedrehten Bezugachsen (s. Gln. 8.14). Wenn I_η und I_ζ Extremwerte annehmen, bezeichnet man η und ζ als Hauptachsen und I_η und I_ζ als Hauptträgheitsmomente.

$$\begin{aligned}
I_\eta &= \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{1}{2}(I_y - I_z) \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi, \\
I_\zeta &= \frac{1}{2}(I_y + I_z) - \frac{1}{2}(I_y - I_z) \cos 2\varphi - I_{yz} \sin 2\varphi, \\
I_{\eta\zeta} &= -\frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi.
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Das polare Flächenträgheitsmoment ergibt sich aus $I_p = I_\eta + I_\zeta = I_y + I_z$ und zeigt, dass I_p bezüglich einer Drehung des Bezugssystems *invariant* ist.

Hauptträgheitsmomente und Hauptachsen: I_η und I_ζ sind Funktionen von φ und werden mit den Bedingungen $\frac{dI_\eta}{d\varphi} = 0$ bzw. $\frac{dI_\zeta}{d\varphi} = 0$ extremal. Beide Bedingungen führen auf das gleiche Ergebnis:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}, \tag{8.15}$$

wobei φ^* den Winkel darstellt, bei dem ein Extremalwert für I_η bzw. I_ζ auftritt. Wegen $\tan 2\varphi^* = \tan 2(\varphi^* + \frac{\pi}{2})$ gibt es eine weitere Achse mit dem Richtungswinkel $(\varphi^* + \frac{\pi}{2})$, für die ein weiterer Extremalwert für I_η bzw. I_ζ auftritt. Diese beiden Achsen stehen senkrecht zueinander und werden *Hauptachsen* genannt. Die dazugehörigen Trägheitsmomente nennt man *Hauptträgheitsmomente*, die durch Einsetzen von φ^* aus Gl. 8.15 in die Gln. 8.14 wie folgt berechnet werden:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \tag{8.16}$$

Mit dem Winkel φ^* verschwindet das Deviationsmoment ($I_{\eta\zeta} = 0$). Ein Achsensystem, für welches das Deviationsmoment Null ist, ist demnach ein Hauptachsensystem. Da für eine Fläche mit einer Symmetrieachse das Deviationsmoment Null ist, sind die Symmetrieachse und eine dazu senkrechte Achse die Hauptachsen.

8.3 Balkenbiegung

Für die Herleitung der Grundgleichungen setzen wir das Koordinatensystem für den Balken so fest, dass y - und z -Achsen die Hauptachsen des

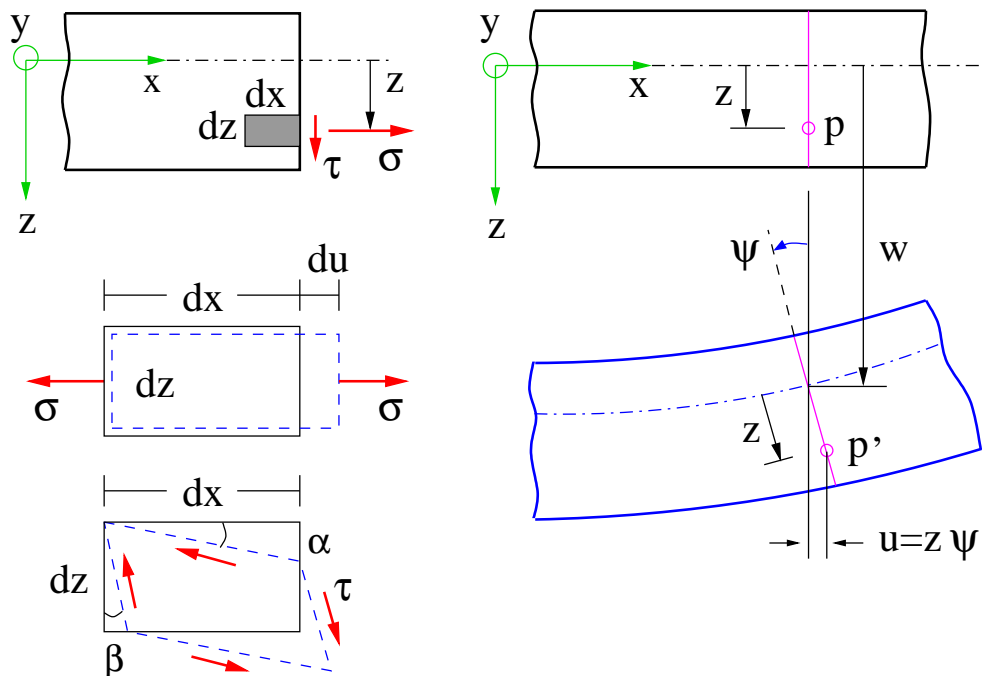


Abb. 8.7: Balkenbiegung unter Schnittgrößen M und Q (Normalspannung σ und Schubspannung τ).

Balkenquerschnitts entsprechen ($I_{yz} = 0$). Des weiteren nehmen wir an, dass der Balken nur in der y, z -Ebene und zwar so belastet wird, dass die Resultierende der inneren Kräfte lediglich das Moment M_y und die Querkraft Q sind, $N = 0$, (Abb. 8.7). Nun schreiben wir die drei Gleichungsarten für ein Balkenelement unter Strecklast an.

Gleichgewicht (Last \leftrightarrow Schnittgröße):

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = Q, \quad (8.17)$$

wobei für Q und M gilt:

$$M = \int_A z \sigma dA, \quad Q = \int_A \tau dA. \quad (8.18)$$

Entsprechend unserer Voraussetzung gilt: $N = \int_A \sigma dA = 0$.

Kinematische Beziehungen (Verschiebung \leftrightarrow Verzerrung):

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (8.19)$$

Elastizitätsgesetz (Spannung \leftrightarrow Verzerrung):

$$\sigma = E \varepsilon, \quad \tau = G \gamma. \quad (8.20)$$

Das **Schubmodul** G stellt den Proportionalitätsfaktor zwischen der Schubspannung und der Winkeländerung dar.

Die Verschiebungen $u = u(x, z)$ und $w = w(x, z)$ sind unbekannt und lassen in dieser Form keine eindeutige Ermittlung der Spannungen und Verzerrungen zu. Daher werden die folgenden Annahmen über die Verschiebungen der Punkte eines Balkenquerschnitts an einer beliebigen Stelle x getroffen :

1. w ist von z unabhängig , $w = w(x)$. Die Balkenhöhe bleibt daher unverzerrt ($\varepsilon_z = 0$).
2. u ist linear von z abhängig $u(x, z) = \psi(x)z$. Querschnitte, die im unverformten Zustand des Balkens eben sind, bleiben bei der Verformung eben. Sie erfahren neben der Absenkung eine reine Drehung um den *kleinen Drehwinkel* $\psi = \psi(x)$ (\odot positiv).

Unter Berücksichtigung dieser Annahmen erhält man aus Gln. 8.19 und 8.20 mit der Abkürzung $\frac{d}{dx} = ()'$:

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} = E\psi'z \quad (8.21)$$

$$\tau = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G(w' + \psi) \quad (8.22)$$

Darin ist w' die Neigung der verformten Balkenachse. Sie ist wegen $|w'| \ll 1$ gleich dem Neigungswinkel ψ . Durch Einsetzen von σ aus Gl. 8.21 in Gl. 8.18a erhält man:

$$M = E\psi' \int z^2 dA = EI\psi' \quad (8.23)$$

Diese Gleichung nennt man **Elastizitätsgesetz für Biegemoment**. Sie verknüpft das Biegemoment M mit der Krümmung¹ der Balkenachse ψ' . Das Produkt EI wird *Biegesteifigkeit* genannt.

Mit dem Einsatz von σ in $N = \int \sigma dA$ erhält man $N = E\psi' \int z dA$, in dem das Integral das statische Moment um die Hauptachse y darstellt und gleich Null ist. Daraus ergibt sich $N = 0$, was unserer Voraussetzung entspricht und zugleich zeigt, weshalb diese spezielle Wahl der Koordinatenachsen getroffen wurde.

¹Krümmung $\chi_B = \frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}$ ist näherungsweise für kleine Neigungswinkel ψ gleich ψ'

Die Gl. 8.22 weist jedem Querschnitt eine konstante Verteilung der Schubspannung zu, was der Realität nicht entspricht. Um die Veränderlichkeit von τ in der Gl. 8.18b zu berücksichtigen, führt man einen Korrekturfaktor χ wie folgt ein:

$$Q = \chi GA(w' + \psi) \quad (8.24)$$

Diese Gleichung nennt man **Elastizitätsgesetz für Querkraft**. Das Produkt GA wird *Schubsteifigkeit* genannt.

8.3.1 Normalspannung

Durch Einsetzen von $\psi' = \frac{M}{EI}$ in Gl. 8.21 erhält man für die Normalspannung :

$$\sigma = \frac{M}{I}z. \quad (8.25)$$

Diese Gl. zeigt die lineare Verteilung der Normalspannung über den Querschnitt (s. Abb. 8.1). Die maximale Spannung tritt damit in den Fasern, die die größte Entfernung zur y -Achse haben ($z = z_{max}$). Mit $z = 0$ liegt man auf einer Querschnittshöhe, wo die Normalspannung Null ist. Daher wird die y -Achse, die auf dieser Höhe liegt, die Nulllinie genannt. Jeder Punkt unterhalb der Nulllinie ($z > 0$) steht unter *Zugspannung* ($\sigma > 0$) und oberhalb der Nulllinie unter *Druckspannung* ($\sigma < 0$). Da die Faser des Balkens, die auf der Höhe $z = 0$ liegen, weder unter Zug- noch unter Druckspannung stehen, werden sie *neutrale Faser* genannt. Die x -Achse liegt auf der Ebene der neutralen Faser.

8.3.2 Widerstandsmoment

Durch Devidieren des Flächenträgheitsmoments durch $|z_{max}|$ erhält man eine neue geometrische Größe mit der Einheit [$Länge^3$], die in der Praxis einfacher zu verwenden ist und das *Widerstandsmoment* W genannt wird:

- Sind das Beanspruchungsmoment M und das Widerstandsmoment W bekannt, ergibt sich die maximale Spannung im Querschnitt aus:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}.$$

- Sind das Widerstandsmoment und die zulässige Spannung für einen Querschnitt bekannt, ergibt sich das größte Moment, das diesen Querschnitt beanspruchen darf, aus: $M_{max} \leq W\sigma_{zul}$.
- Wenn das Beanspruchungsmoment und die zulässige Spannung bekannt sind, ergibt sich das erforderliche Widerstandsmoment für den Querschnitt aus: $W_{erf} \geq \frac{M}{\sigma_{zul}}$.

Beispiel 8.3

8.4 Differentialgleichung der Biegelinie

Wenn man annimmt, dass ein Balkenelement unter der Einwirkung von Querkraft keine Winkeländerung erfährt, bezeichnet man den Balken als *schubstarr*. Geometrisch bedeutet dies die Querschnitte, die vor der Biegung des Balkens senkrecht auf der Balkenachse standen, werden auch nach der Biegung senkrecht auf der deformierten Balkenachse stehen (zweite *Bernoullische Annahme*). Für einen schubstarrten Balken gilt: $\chi GA \rightarrow \infty$. Damit die Querkraft Q in Gl. 8.24 endlich bleibt, muss gelten:

$$w' + \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad w' = -\psi. \quad (8.26)$$

Mit $M = EI\psi'$ erhält man:

$$M = -EIw''. \quad (8.27)$$

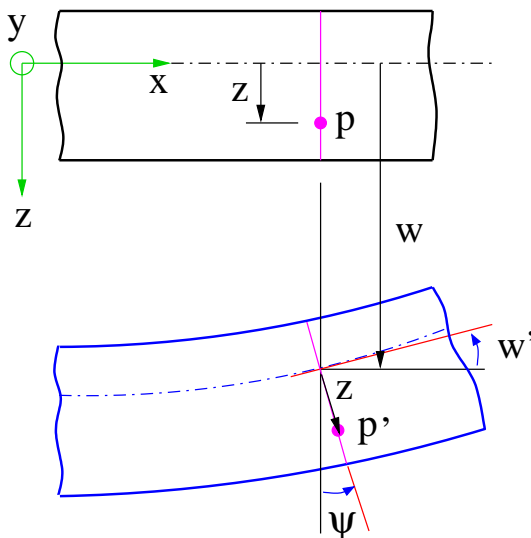


Abb. 8.8: Bei der Biegetheorie des schubstarrten Balkens wird vorausgesetzt, dass der Balkenquerschnitt keine Schubverzerrung erfährt. Geometrisch bedeutet dies; jeder Querschnitt steht nach der Biegung senkrecht auf der Balkenachse, wenn er vor der Biegung senkrecht darauf gestanden hat; 2.te Bernoullische Annahme. Folge: $w' = -\psi$.

Lagerart	w	w'	M	Q
Gelenklager	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$
Parallelführung	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$
Schiebehülse	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
Einspannung	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
Freies Ende	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$

Tabelle 8.1: Randbedingungen der Balkenbiegung.

Diese Gleichung nennt man die *Differentialgleichung der Biegelinie*. Durch Differentieren von 8.27 nach x erhält man:

$$\frac{dM}{dx} = -(EIw'')' \quad \Rightarrow \quad Q = -(EIw'')'. \quad (8.28)$$

Durch nochmaliges Differentieren nach x bekommt man:

$$\frac{dQ}{dx} = -(EIw''')' \quad \Rightarrow \quad q = (EIw''')'. \quad (8.29)$$

Wenn der Verlauf von M, Q oder q und die Biegesteifigkeit EI bekannt sind, kann man durch Integration von 8.27, 8.28 oder 8.29 die Neigung $w'(x)$ und die Durchbiegung $w(x)$ entlang der Balkenachse bestimmen. $w(x)$ wird auch die *Biegelinie* des Balkens genannt. Die Integrationskonstanten werden aus *geometrischen* Randbedingungen (w und w') und *natürlichen* Randbedingungen (Q und M) bestimmt (s. Tabelle 8.1). Für Balken mit konstanter Biegesteifigkeit ($EI = konst.$) erhält man:

$$Q = -EIw''', \quad q = EIw^{IV}. \quad (8.30)$$

Beispiel 8.4

8.4.1 Superposition

Die Differentialgleichung $EIw^{IV} = q$ erfüllt die beiden Voraussetzungen für den Einsatz der Superpositionsmethode (s. Abschnitt 7.2); d. h. die Last q steht in linearer Beziehung zur Durchbiegung $w(x)$ und verändert die ursprüngliche Geometrie des Balkens nicht erheblich. Als Folge können die Durchbiegungen infolge einer Reihe von separaten Belastungen, die auf einen Balken wirken, aufeinander addiert werden. Z. B. wenn $w_1(x)$ die Durchbiegung infolge der Last q_1 und $w_2(x)$ die Durchbiegung infolge der

Last q_2 ist, ergibt sich die gesamte Durchbiegung bei gleichzeitiger Einwirkung von q_1 und q_2 aus der algebraischen Summe $w_1(x) + w_2(x)$.

Mit Hilfe der vorhandenen Tabellen für verschiedene Belastungsarten von Balken ist es möglich die Durchbiegung eines Balkens, der unter mehrerer Belastungen liegt, durch algebraische Summe der Durchbiegungen infolge der einzelnen Belastungsarten zu ermitteln.

Die Nutzung der Superpositionsmethode beschränkt sich nicht auf die Ermittlung der Durchbiegung. Auch andere Größen wie Neigung der Balkenachse und Spannungen lassen sich durch Superposition berechnen.

Beispiel 8.5

Kapitel 9

Torsion

9.1 Einleitung

Torsion ist neben der Biegung und der axialen Beanspruchung die dritte Art der Beanspruchung von Tragwerkselementen. Ein Moment, das versucht ein Tragwerkselement um eigene Längsachse zu drehen, heißt **Torsionsmoment**. Lässt sich das Tragwerkselement nicht unverhindert drehen, führt diese Einschränkung der Bewegungsfreiheit zur *Torsion* des Bauelementes, die Spannungen und Verformungen im Bauteil hervorrufen.

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Torsion von geraden Tragwerkselementen beschäftigen und wählen wir dabei den kreisförmigen Querschnitt. Ein gerades Bauteil mit kreisförmigem Querschnitt nennt man eine kreiszylindrische Welle.

9.2 Torsion kreiszylindrischer Welle

Die kreiszylindrische Welle ist ein der wichtigsten Mittel für die Übertragung des Drehmoments von einem Ort zu dem anderen. Die Torsionsbeanspruchung einer Welle ist so groß wie der Widerstand, den die Welle gegen eine freie Drehung leistet. Dieser Widerstand wird entweder durch die Lagerungsart oder von den Abnahmestellen des zu übertragenen Drehmoments bestimmt. Z. B. wenn man eine festgesetzte Schraube mit einem Schraubenzieher losschrauben will, baut sich die Torsion in den Schraubenzieher nur solange auf bis der Widerstand der Schraube gegen Drehung

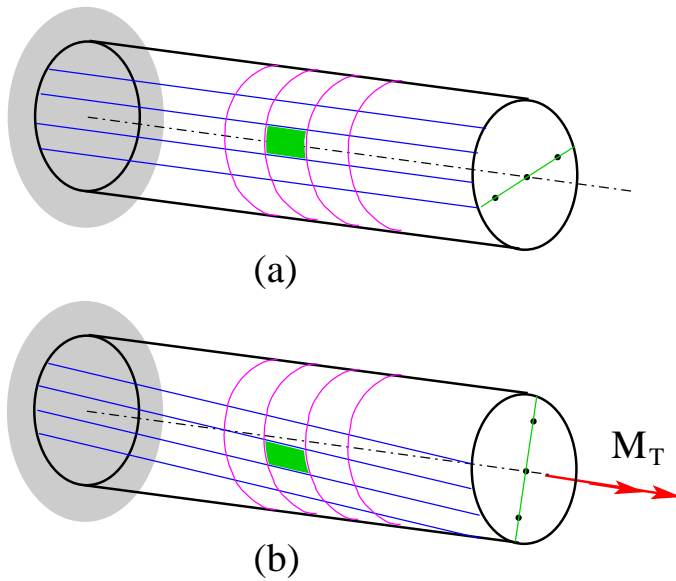


Abb. 9.1: Durch Torsionsbeanspruchung einer kreisförmigen Welle werden die längsgerichteten Geraden verdreht (zu Helixen). Kreise bleiben Kreise und Punkte auf einem Querschnitt, die vor der Torsion auf einer Gerade lagen, bleiben auf einer Gerade (Die Querschnitte behalten ihre Gestalt). Die Verformung eines Elements auf der Oberfläche zeigt, dass es durch Schubspannung verzerrt wurde.

überwunden wird. Danach sinkt die Torsion der Schraubenzieher und damit auch die Spannungen und Verformungen, die im Schraubenzieher vor dem Aufgehen der Schraube aufgetreten waren.

Nun betrachten wir eine Welle, die an einem Ende eingespannt ist und am anderen Ende durch ein Torsionsmoment belastet wird (Abb. 9.1b). Wenn wir die Welle vor der Belastung mit Geraden und Kreisen wie in Abbildung 9.1a versehen, werden wir nach der Torsion der Welle Folgendes beobachten:

- Die Geraden werden infolge der Torsion verdreht (aus einer Gerade wird ein Helix), während die Kreise Kreise bleiben. So wird jeder Kreis durch alle verdrehte Linien mit dem gleichen Winkel geschnitten.
- Die Stirnseite der Welle bleibt eben (verwölbungsfrei). Jede Gerade auf der Stirnseite bleibt nach der Torsion als Gerade erhalten (Abb. 9.1). Das gilt auch für alle andere Querschnitte innerhalb des Stabes.

Diese beiden Beobachtungen bei der kreisförmigen Welle, die auch in der Elastizitätstheorie nachweisbar sind, gelten für Querschnittsformen, die keine Rotationssymmetrie aufweisen, nicht.

Nun betrachten wir ein Element mit dem beliebigen Radius $r \leq R$ und infinitesimaler Länge dx aus einer Welle, die durch ein Torsionsmoment

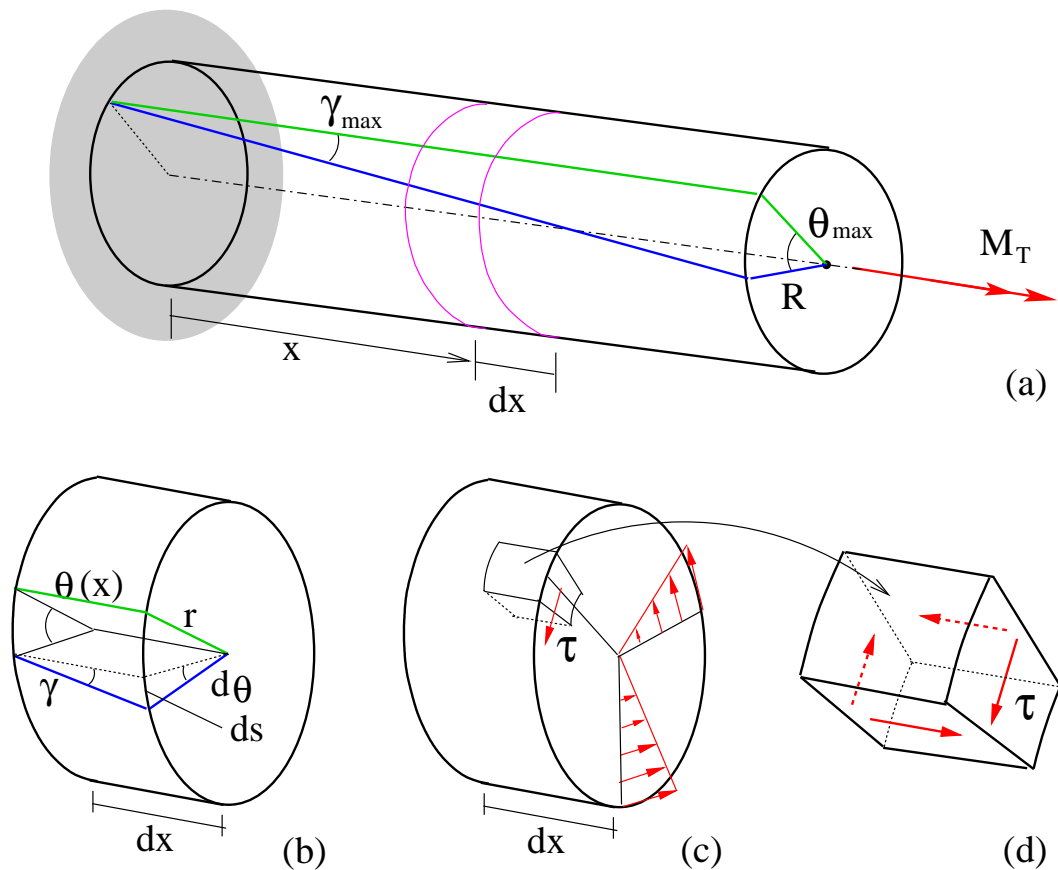


Abb. 9.2: (a) Durch Torsionsmoment beanspruchte Welle erfährt eine Verdrehung. (b) und (c) Verformungen bzw. Spannungen eines infinitesimalen Kreiszylinders beliebigem Radius. (d) Die Oberfläche des infinitesimalen Kreiszylinders ist wie die Oberfläche der Welle selbst spannungsfrei.

beansprucht wird. Der Querschnitt an der Stelle $x + dx$ ist bezogen auf den Querschnitt an der Stelle x um den Winkel $d\theta$ gedreht. Der Quotient $\chi_T = \frac{d\theta}{dx}$ wird *Verwindung* genannt. Die relative Verdrehung der Querschnitte erzeugt eine Scherung in der Welle, die man mit der Schubverformung γ bezeichnet. γ ist für den betrachteten Fall über die gesamte Länge der Welle konstant. Aus der Verformungskinematik erhält man (Abb. 9.2b):

$$rd\theta = \gamma dx \quad \Rightarrow \quad \gamma = r \frac{d\theta}{dx} \quad (9.1)$$

Die Schubverformungen rufen Schubspannungen in der Welle hervor, die im direkten Verhältnis zu dem Schubmodul, G , und der Schubverformung, γ , stehen (Elastizitätsgesetz für die Schubbeanspruchung):

$$\tau = G\gamma \quad \Rightarrow \quad \tau = Gr \frac{d\theta}{dx} = Gr\theta' \quad (9.2)$$

Diese Gleichung weist auf eine in r lineare Verteilung der Schubspannung auf der Querschnittsfläche. Da die Oberfläche der Welle spannungsfrei ist, müssen die Schubspannungen an jedem Punkt des Querschnitts auf dem Radius, der durch den Punkt geht, senkrecht stehen. Dies bedeutet gemeinsam mit der linearen Verteilung der Spannung, dass die maximale Schubspannung τ_{max} bei $r = R$ und tangential zum Querschnitt auftritt (Abb. 9.2c und d).

Das Gleichgewicht am Querschnitt fordert:

$$M_T = \int r\tau dA \quad \Rightarrow \quad M_T = G \int r^2 dA \theta' = GI_T \theta' \quad (9.3)$$

Die geometrische Größe $\int r^2 dA$ ist das polare Flächenträgheitsmoment, I_P , das hier als *Torsionsträgheitsmoment*, I_T , bezeichnet wird. Das Produkt GI_T nennt man die *Torsionssteifigkeit*.

Zur Berechnung der Verdrehung an beliebiger Stelle der Längsachse, muss man die Verwindung, θ' , bis zu der gewünschten Stelle integrieren. Für die Gesamtlänge der Welle ergibt sich die maximale Verdrehung zu:

$$\theta_l = \int_0^l \theta' dx \quad \Rightarrow \quad \theta_l = \frac{M_T l}{GI_T} \quad (9.4)$$

Aus Gl. 9.2 erhält man dann

$$\tau = \frac{M_T}{I_T} r. \quad (9.5)$$

Die maximale Schubspannung lässt sich dann aus

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_T} R \quad \text{oder} \quad \tau_{max} = \frac{M_T}{W_T} \quad (9.6)$$

berechnen, wobei W_T das *Torsionswiderstandsmoment* genannt wird und für die kreiszylindrische Welle gleich $\frac{I_T}{R}$ ist. Für die kreiszylindrische Welle gilt:

$$I_T = I_p = \frac{\pi}{2} R^4 \quad , \quad W_T = \frac{\pi}{2} R^3.$$

Vorzeichenkonvention für Torsionsmoment und Verdrehung

Die Richtung des Normalvektors auf jedem geraden Querschnitt wird als *positive Längsrichtung* definiert. Das gilt auch für die beiden Enden. Somit ist die positive Längsrichtung an einem Ende gegen die Richtung der

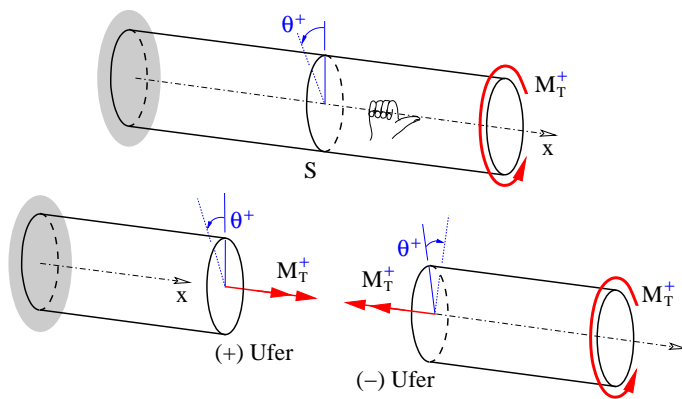


Abb. 9.3: Definition der positiven Drehung und des positiven Torsionsmoments für die Welle als Ganzes und an den Schnittufern.

Längsachse (hier x -Achse) gerichtet. Für die Welle als Ganzes ist ein Torsionsmoment positiv, wenn es eine positive Drehung um die x -Achse hervorruft. Ein Schnittufer wird als positiv bezeichnet, wenn seine Flächennormale die gleiche Richtung wie die Längsachse hat.

Mit der x -Achse in der rechten Hand zeigen die nach innen gebeugten Finger den positiven Drehsinn, wenn der Daumen in positive Längsrichtung zeigt. In diesem Fall zeigt das Doppelpfeil des Torsionsmoments in die positive Längsrichtung (Abb. 9.3). Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen soll man darauf achten, dass die positiven Größen am negativen Schnittufer mit negativem Vorzeichen in die Gleichung eingehen.

9.2.1 Verteiltes Torsionsmoment

Torsionsmoment kann auch als verteilte Last für eine Welle auftreten. Man stelle sich eine Bohrerstange vor, die in den Sandboden bohrt. Die Reibung zwischen dem Boden und der Stange während des Bohrens ruft entlang der Stange im Bohrloch ein verteiltes Torsionsmoment hervor, dessen Größe an jeder Stelle von der Bortiefe abhängt. Hier betrachten wir eine einseitig eingespannte Welle, die durch ein verteiltes Torsionsmoment mit der variablen Intensität $m_T(x)$ beansprucht wird (Abb. 9.4a), und stellen die Gleichgewichtsbedingung für ein Element infinitesimaler Länge auf (Abb. 9.4b):

$$\begin{aligned} \rightarrow: \quad -M_T + m_T dx + M_T + dM_T = 0 & \quad \Rightarrow \quad dM_T + m_T dx = 0 \\ \frac{dM_T}{dx} = M'_T = -m_T & \quad (9.7) \end{aligned}$$

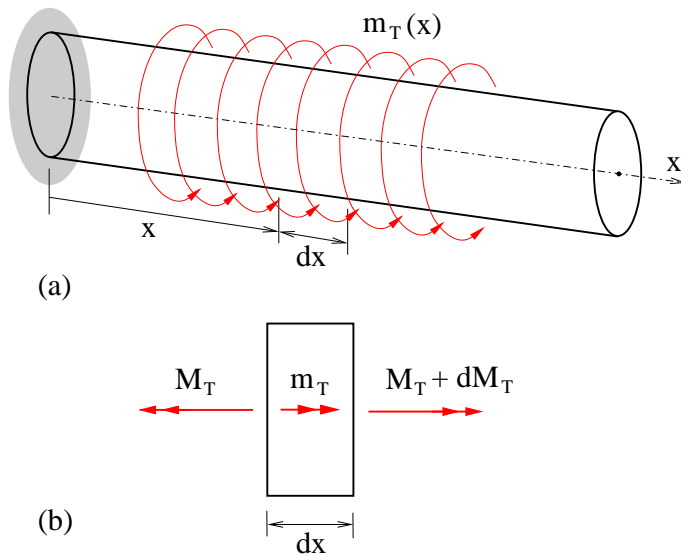


Abb. 9.4: a) Verteiltes Torsionsmoment mit einer ortsabhängigen Intensität $m_T(x)$. b) Beanspruchungsgrößen eines Wellenelementes infinitesimaler Länge.

Für $m_T = 0$ ergibt $M_T = konst..$ Durch das Differenzieren der Dgl. 9.3 nach x erhält man:

$$(GI_T \theta')' = -m_T. \quad (9.8)$$

Dies ist eine Dgl. zweiter Ordnung, die man mit Hilfe der zwei Randbedingungen am zwei Enden lösen kann. Wie man sieht, es besteht eine Analogie zwischen dieser Gleichung und der Differentialgleichung des Stabes; $(EAu')' = -n$.

9.2.2 Torsion einer Welle mit Kreisringquerschnitt

Für eine Welle mit einem Kreisringquerschnitt gelten alle bis jetzt hergeleiteten Gleichungen für die kreiszylindrische Welle mit vollem Querschnitt. Bei der Anwendung dieser Gleichungen soll man darauf achten, dass bei einem Kreisringquerschnitt folgende geometrische Größen einzusetzen sind:

$$I_T = \frac{\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4) \quad , \quad W_T = \frac{\pi}{2} \frac{(R_a^4 - R_i^4)}{R_a}.$$

Hier ist R_a der Außenradius und R_i der Innenradius. Wenn die Welle mit Kreisringquerschnitt dünnwändig ist, kann man I_T und W_T mit einem mittleren Radius, $R_m = \frac{1}{2}(R_a + R_i)$, rechnen:

$$I_T \approx 2\pi R_m^3 t \quad , \quad W_T \approx 2\pi R_m^2 t.$$

Beispiel 9.1

Teil III

Dynamik

Einleitung

Mechanik der festen Körper ist ein Teil der Physik, der aus Sicht der Bewegung in zwei Teile aufgeteilt wird, Statik und Dynamik. Während Statik sich mit dem Gleichgewicht des Körpers im Zustand der Ruhe befasst, untersucht Dynamik die beschleunigte Bewegung des Körpers.

Die Entwicklung von Prinzipien der Dynamik wurde erst dann möglich, wenn die genaue Messung von Zeit möglich wurde. Galileo Galilei (1564-1642) ist einer der Pionieren in diesem Feld, der Experimente mit Pendel und fallenden Körper gemacht hat. Den größten Beitrag in Dynamik hat aber Isaac Newton (1642-1727) mit seinen drei fundamentalen Gesetzen der Dynamik und dem Gesetz der allgemeinen Gravitationskraft geleistet. Kurz nach dem Postulieren dieser Gesetze wurden sehr wichtige Techniken zur Anwendung dieser Gesetze durch Euler, D’Lambert, Lagrange und anderen entwickelt.

Dynamik besteht aus zwei Lehren: *Kinematik* und *Kinetik*. Es handelt sich um die Kinematik, wenn nur die geometrischen Aspekte und den zeitlichen Ablauf der Bewegung von Interesse sind. Betrachtet man den Zusammenhang zwischen der Bewegung und den Kräften als Ursache der Bewegung, dann handelt es sich um die Kinetik.

Kapitel 10

Kinematik des Massenpunktes

In diesem Kapitel betrachten wir die Kinematik eines Punktes, der zwar keine Geometrie und Form hat, aber eine Masse besitzen kann und daher auch Massenpunkt (oder Partikel) genannt wird. Es gibt viele Bewegungen, bei denen die Geometrie und Form des Bewegungsobjektes bezogen auf die Bewegung vernachlässigt werden können, z. B. die Bewegung eines Raketes oder eines Geschosses im Raum. Wenn man sich solches Bewegungsobjekt in ihrem Massenmittelpunkt konzentriert vorstellt, kann man die Bewegung dieses Punktes als die Bewegung des Objektes betrachten. So wird die Drehung des Objektes um diesen Punkt vernachlässigt. Da in der Kinematik Kräfte keine Rolle spielen, ist leicht nachvollziehbar, dass die Masse auch keine Rolle bei der Kinematik eines Massenpunktes übernimmt. Kinematik des Massenpunktes wird durch

- die Position (augenblickliche Lage),
- die Geschwindigkeit und
- die Beschleunigung

des Partikels charakterisiert.

10.1 Allgemeine Bewegung entlang einer Kurve

Wir betrachten ein Partikel, der sich entlang einer räumlichen Kurve bewegt. Wegen der Dreidimensionalität des Bewegungspfades ist angebracht

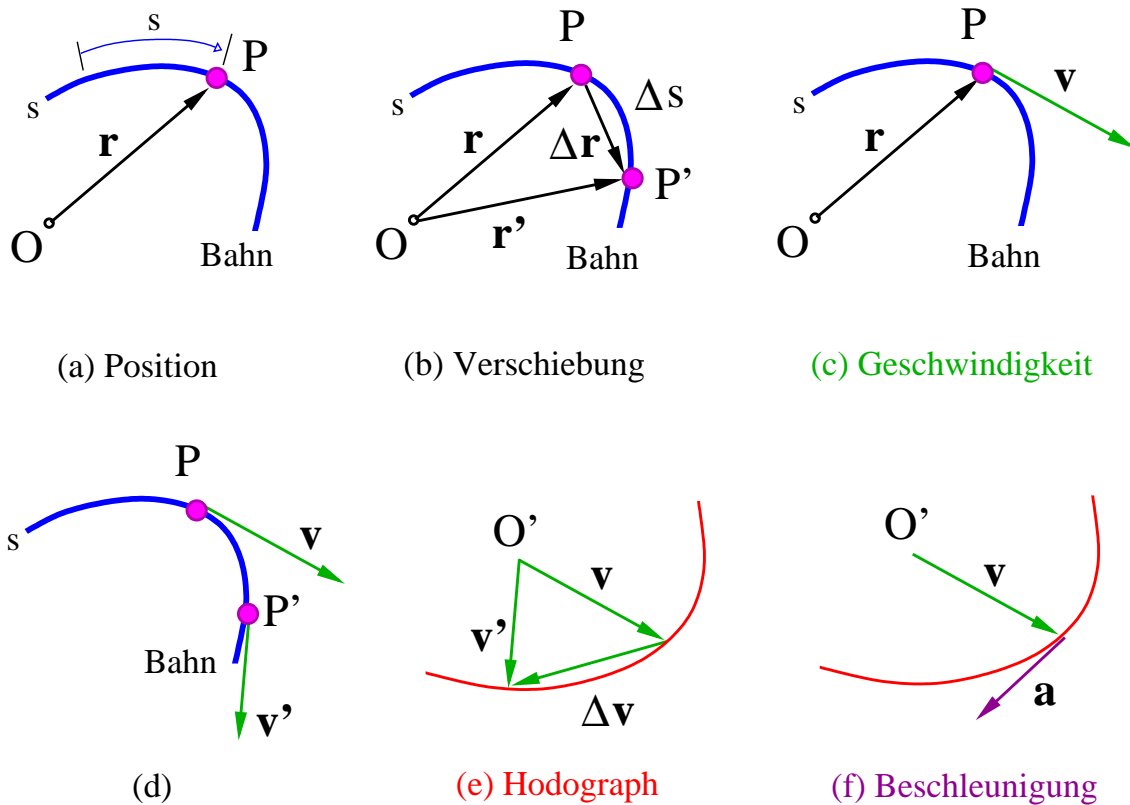


Abb. 10.1: Allgemeine Bewegung entlang einer Kurve; kinematische Größen.

die Vektoranalyse zur Beschreibung der Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung zu nutzen. Zuerst betrachtet wird die Bewegung ohne Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem. In den folgenden Abschnitten wird die Bewegung in verschiedenen Koordinatensystemen vorgestellt.

Position: Man betrachte ein Partikel am Punkt P auf einer Kurve, die durch die Funktion s im Raum beschrieben ist. Die Position des Partikels bezogen auf einen festen Punkt (Bezugspunkt) O wird durch den *Ortsvektor* \mathbf{r} gegeben. Wenn sich das Partikel entlang der Kurve bewegt, ändert sich in der Regel sowohl der Betrag als auch die Richtung des Ortsvektors. Daher ist $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ eine Funktion der Zeit und beschreibt die Bahn des Partikels.

Verschiebung: Nehme an, dass innerhalb eines kleinen Zeitraums Δt das Partikel eine Strecke von Δs entlang der Bahn zurücklegt und die neue Position P' annimmt, die durch $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ beschrieben wird. Die Verschiebung $\Delta \mathbf{r}$ zeigt die Änderung der Partikelposition und wird durch die Vektorsubtraktion $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ bestimmt.

Geschwindigkeit: Während der Zeit Δt wird die *mittlere* Geschwindigkeit wie folgt definiert:

$$\mathbf{v}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Die *augenblickliche* Geschwindigkeit (ab sofort nur noch Geschwindigkeit genannt) ist der Grenzwert von mittlerer Geschwindigkeit, wenn $\Delta t \rightarrow 0$. Sie ist also der Grenzwert von zeitlicher Änderung des Ortsvektors.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (10.1)$$

Geschwindigkeit \mathbf{v} ist ein Vektor, dessen Richtung am Punkt P tangential zur Bahn ist, weil $d\mathbf{r}$ an diesem Punkt tangential zur Bahn ist. Der Richtungssinn von \mathbf{v} ist wie der Durchlaufsin von Bahn.

Für den Betrag der Geschwindigkeit rufen wir in die Erinnerung, dass der Verschiebungsbetrag $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta r$ gleich der Länge des Geraden $\overline{PP'}$ ist. Für $\Delta t \rightarrow 0$ nähert sich diese Länge an die *Bogenlänge* Δs und der Betrag der Geschwindigkeit ergibt sich zu

$$v = |\mathbf{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (10.2)$$

Der Geschwindigkeitsbetrag v kann daher durch die Ableitung der Bahnfunktion nach Zeit berechnet werden.

Beschleunigung: Wenn der Partikel an Zeitpunkt t die Geschwindigkeit \mathbf{v} und an Zeitpunkt $t + \Delta t$ die Geschwindigkeit $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ hat, dann lässt sich die *mittlere* Beschleunigung während des Intervalls Δt wie folgt berechnen

$$\mathbf{a}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t},$$

wobei $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ ist. Zu jedem Punkt des Bewegungspfades gehört ein Geschwindigkeitsvektor. Wenn wir die Anfangspunkte aller diesen Vektoren durch parallele Verschiebung auf einen gemeinsamen Punkt O' bringen, werden die Endpunkte der Vektoren auf einer Kurve liegen, die *Hodograph* genannt wird. Auf dem Hodograph zeigt der Differenzvektor $\Delta \mathbf{v}$ vom Endpunkt von \mathbf{v} zum Endpunkt von \mathbf{v}' . Nun lassen wir zur Berechnung von *augenblicklicher* Beschleunigung das Intervall Δt unendlich klein werden ($\Delta t \rightarrow 0$). Im Grenzzustand ist $\Delta \mathbf{v}$ tangential zum Hodograph und

wir haben

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (10.3)$$

Setzen wir die Gl.10.1 in diese Gleichung ein, erhalten wir

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Nach Definition ist der Beschleunigungsvektor \mathbf{a} tangential zum Hodograph und daher, im Allgemeinen, nicht tangential zur Bahn. Der Grund liegt darin; Wenn sich das Partikel vom Punkt P zum Nachbarpunkt P' bewegt, richtet sich der Vektor $\Delta \mathbf{v}$ nach Bahninnere (konkave Seite) und daher kann die Beschleunigung \mathbf{a} nicht zur Bahn tangential bleiben. Fazit: \mathbf{v} ist stets tangential zur Bahn und \mathbf{a} ist stets tangential zum Hodograph.

10.2 Bewegung entlang eines Geraden

Die Bewegung eines Partikels entlang eines Geraden ist eine eindimensionale Bewegung und daher durch eine einzige Koordinate beschreibbar. Wir nehmen einen festen Punkt O auf diesem Bewegungsgeraden als Bezugspunkt an. Der *Ortsvektor* \mathbf{r} zeigt von dem Bezugspunkt zu der momentanen Lage des Partikels P . Bei der Bewegung ändern sich nur der Betrag und der Richtungssinn von \mathbf{r} . Die Richtung des Ortsvektors bleibt immer entlang des Geraden und zwar unverändert. Daher ist es einfacher den Ortsvektor \mathbf{r} durch die skalare Lagekoordinate s zu repräsentieren. Die Größe von s (und von \mathbf{r}) ist der Abstand zwischen O und P . Der Richtungssinn ergibt sich aus dem Vorzeichen von s , das aus der Annahme der positiven Richtung hergeht.

Wenn sich der Partikel von P nach P' bewegt, lässt sich die Verschiebung $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ durch folgenden Ausdruck repräsentieren:

$$\Delta s = s' - s.$$

Δs kann natürlich positiv oder negative sein. Verschiebung ist eine vektorielle Größe und muss daher von der zurückgelegten Strecke, die eine positive skalare Größe ist, unterschieden werden.

Weitere Größen der gradlinigen Bewegung werden wie folgt definiert:

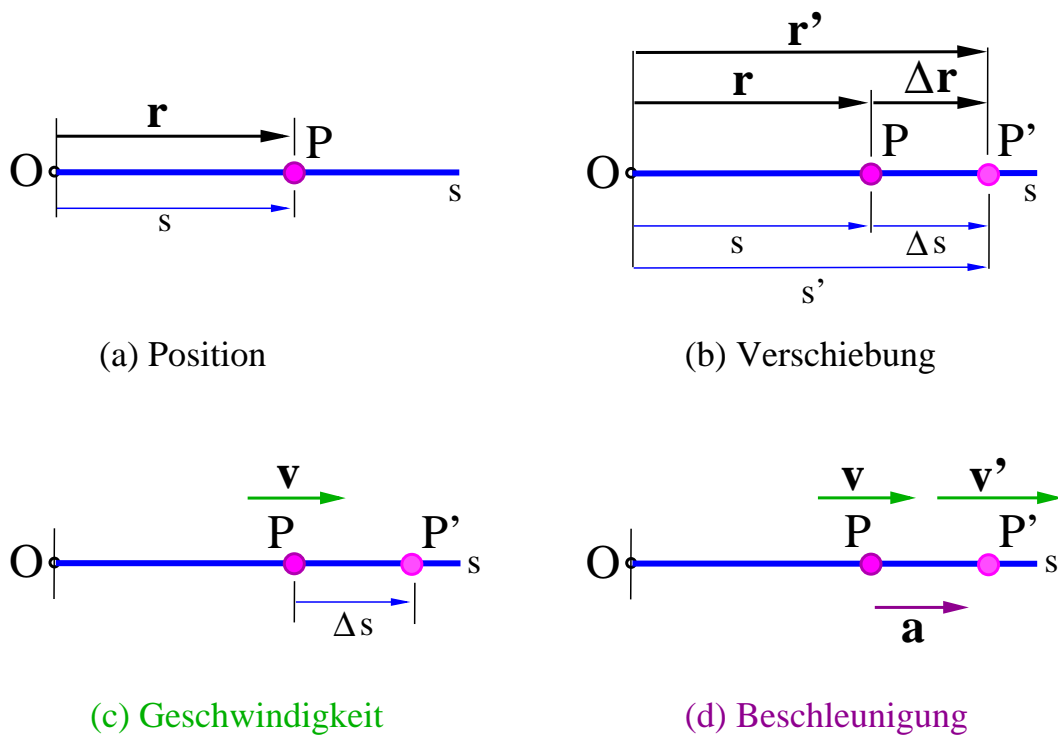


Abb. 10.2: Geradlinige Bewegung; kinematische Größen.

Mittlere Geschwindigkeit:

$$v_{avg} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Geschwindigkeit:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (\overset{+}{\rightarrow}) \quad (10.4)$$

Das Vorzeichen von v ist immer durch das Vorzeichen von Δs oder ds bestimmt, weil Δt und dt immer positiv sind.

Mittlere Beschleunigung:

$$a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Beschleunigung:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (\overset{+}{\rightarrow}) \quad (10.5)$$

Das Vorzeichen von a ist immer durch das Vorzeichen von Δv oder dv bestimmt, weil Δt und dt immer positiv sind.

Eine differentielle Beziehung zwischen Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung erhält man durch das Eliminieren der Zeit zwischen den

Gleichungen 10.4 und 10.5

$$ads = vdv \quad (\overset{+}{\rightarrow}) \quad (10.6)$$

10.2.1 Sonderfälle

Für alle Sonderfälle, die hier behandelt werden, nehmen wir die folgenden Anfangsbedingungen an: $t(0) = t_0$, $v(t_0) = v_0$ und $s(t_0) = s_0$.

Bewegung ohne Beschleunigung

Wenn $a = 0$ ist, bleibt die Geschwindigkeit der Bewegung unverändert, denn es gilt $\frac{dv}{dt} = 0$. Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeit stets der Anfangsgeschwindigkeit gleich ist: $v(t) = v_0$. Die Beziehung zwischen Strecke s und Zeit t lässt sich durch die Integration der Beziehung $ds = vdt = v_0dt$ bestimmen:

$$\int_{s_0}^s d\bar{s} = \int_{t_0}^t v_0 d\bar{t} \quad \Rightarrow \quad s = s_0 + v_0(t - t_0)$$

Konstante Beschleunigung

Wenn die Beschleunigung konstant ist, $a = a_c$, kann man v und s als Funktion von Zeit t darstellen.

Geschwindigkeit als Funktion von Zeit: Durch Integration von $dv = a_c dt$ erhält man

$$\int_{v_0}^v d\bar{v} = \int_{t_0}^t a_c d\bar{t} \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + a_c t. \quad (10.7)$$

Strecke als Funktion von Zeit: Durch Integration von $ds = vdt = (v_0 + a_c t)dt$ erhält man

$$\int_{s_0}^s d\bar{s} = \int_{t_0}^t (v_0 + a_c \bar{t}) d\bar{t} \quad \Rightarrow \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2. \quad (10.8)$$

Geschwindigkeit als Funktion von Lage: Durch Integration von $v dv = a_c ds$ erhält man

$$\int_{v_0}^v \bar{v} d\bar{v} = \int_{s_0}^s a_c d\bar{s} \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0). \quad (10.9)$$

Die Gl. 10.9 kann auch durch Auflösung der Gl. 10.7 nach t und Einsetzen in Gl. 10.8 erreicht werden. Daher ist diese Gleichung nicht unabhängig von den Gln. 10.7 und 10.8.

Beispiele für gradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung sind der freie Fall und der senkrechte Wurf eines Körpers, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird und die Fallstrecke kurz ist. Unter diesen Bedingungen kann die Beschleunigung, die zum Erdmittelpunkt gerichtet ist, in der Nähe der Erdoberfläche als konstant und gleich $g = 9,81\text{m/s}^2$ angenommen werden.

Beschleunigung als Funktion von Zeit

Wenn die Beschleunigung als Funktion von Zeit gegeben ist, $a = a(t)$, kann man die Geschwindigkeit v und die Strecke s als Funktionen von Zeit darstellen.

$$\begin{aligned} dv &= a(t)dt \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + \int_{t_0}^t a(\bar{t})d\bar{t} \\ ds &= v(t)dt \quad \Rightarrow \quad s = s_0 + \int_{t_0}^t v(\bar{t})d\bar{t} \end{aligned}$$

Beschleunigung als Funktion von Geschwindigkeit

Wenn die Beschleunigung als Funktion von Geschwindigkeit gegeben ist, $a = a(v)$, können die Zeit t und die Strecke s als Funktionen von Geschwindigkeit dargestellt werden.

Aus $a(v) = \frac{dv}{dt}$ erhält man durch Variablentrennung $dt = \frac{dv}{a(v)}$. die Integration führt zu:

$$\int_{t_0}^t d\bar{t} = \int_{v_0}^v \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})} \quad \Rightarrow \quad t = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}.$$

Für die Strecke als Funktion von Zeit schreiben wir zuerst (Kettenregel)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v.$$

Trennung der Variablen ergibt: $ds = \frac{v}{a} dv$. Durch Integration erhält man:

$$\int_{s_0}^s d\bar{s} = \int_{v_0}^v \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})} \quad \Rightarrow \quad s = s_0 + \int_{v_0}^v \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}.$$

Beschleunigung als Funktion von Strecke

Wenn die Beschleunigung als Funktion von Strecke gegeben ist, $a = a(s)$, kann man die Geschwindigkeit v und die Zeit t als Funktionen von Strecke darstellen.

Kettenregel und Variablentrennung ergeben: $ads = vdv$. Die Integration ergibt:

$$\int_{v_0}^v d\bar{v} = \int_{s_0}^s a(\bar{s})d\bar{s} \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a(\bar{s})d\bar{s} = f(s).$$

Für die Zeit als Funktion von Strecke setzen wir $v = \sqrt{f(s)}$ in $v = \frac{ds}{dt}$ ein und erhalten wir durch die Integration:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{f(s)}} \quad \Rightarrow \quad t = t_0 + \int_{t_0}^t \frac{d\bar{s}}{\sqrt{f(\bar{s})}} = g(s)$$

Beispiel 10.1

10.3 Bewegung in einer Ebene

Wenn ein Partikel sich entlang einer Kurve bewegt, die auf einer Ebene liegt, braucht man zur Beschreibung der Bewegung zwei unabhängige Koordinaten. Das Koordinatensystem kann frei gewählt werden, aber für jede Art Aufgabe eignet sich das eine oder das andere Koordinatensystem vorteilhaft.

10.3.1 Darstellung im Kartesischen Koordinatensystem - 2D

Im Kartesischen Koordinatensystem wird die Lage (Position) des Partikels auf der Ebene durch den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \tag{10.10}$$

beschrieben. Wegen der Bewegung sind x und y zeitabhängige Funktionen; $x = x(t)$, $y = y(t)$. Und damit gilt auch $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Der Betrag von \mathbf{r} ist immer positiv und gleich

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die *Richtung* von \mathbf{r} wird durch Komponenten des Einheitsvektors $\mathbf{e}_r = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ bestimmt.

Die *Geschwindigkeit* \mathbf{v} des Partikels ergibt sich aus der ersten Ableitung von \mathbf{r} nach Zeit:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) + \frac{d}{dt}(y\mathbf{j}).$$

Bei der Ableitung ist darauf zu achten, dass sowohl die Änderung im Betrag als auch die Änderung in Richtung für jede Komponente zu berücksichtigen ist. Daher sieht die Ableitung beispielsweise für die \mathbf{i} -Komponente so aus:

$$\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist Null, weil das Koordinatensystem raumfest ist (der Betrag und Richtung von \mathbf{i} sind unabhängig von der Zeit). Die Ableitung von \mathbf{j} ist ähnlich wie \mathbf{i} . Man erhält

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}, \quad (10.11)$$

wobei gilt:

$$v_x = \dot{x} \quad ; \quad v_y = \dot{y}. \quad (10.12)$$

Die Geschwindigkeit hat einen Betrag, der durch den positiven Wert

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

und eine Richtung, die durch Komponenten des Einheitsvektors $\mathbf{e}_v = (\frac{v_x}{v}, \frac{v_y}{v})$ bestimmt wird und immer zur Bewegungsbahn tangential ist.

Die *Beschleunigung* \mathbf{a} des Partikels ist ein Vektor und ergibt sich aus der ersten Ableitung des Geschwindigkeitsvektors (bzw. der zweiten Ableitung des Ortsvektors) und wenn man sie in ihren Komponenten darstellt, hat man

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}, \quad (10.13)$$

wobei

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad (10.14)$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \quad (10.15)$$

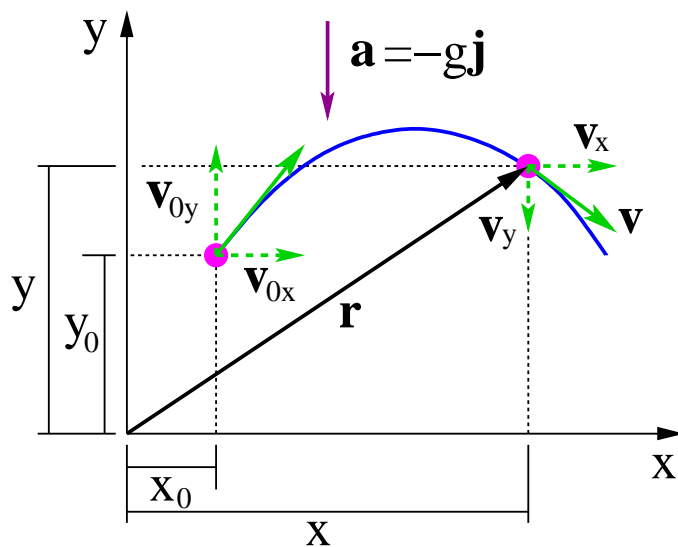


Abb. 10.3: Geschwindigkeit und Beschleunigung des freien Flugs durch einen Wurf.

ist. Der Betrag von Beschleunigung ist durch den positiven Wert

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

bestimmt und ihre Richtung durch Komponenten des Einheitsvektors $\mathbf{e}_a = \left(\frac{a_x}{a}, \frac{a_y}{a}\right)$. Da Beschleunigung \mathbf{a} die Änderungsrate der Geschwindigkeit darstellt, ist in der Regel nicht tangential zur Bahn.

Freie Bewegung bei Wurf

Wenn der Wurf eines Objektes nicht senkrecht erfolgt, findet sein freier Flug in einer Ebene statt, die durch Bewegungsbahn aufgespannt wird. Die Bewegung auf dieser Ebene lässt sich anhand eines zweidimensionalen Kartesischen Koordinatensystems einfach darstellen.

Solange während des Fluges keine andere Kraft außer dem Eigengewicht auf den Körper einwirkt, wirkt die konstante Beschleunigung $a_c = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ immer in vertikaler Richtung nach unten. Wir nehmen an, dass das Geschoss zum Zeitpunkt $t = 0$ die Position (x_0, y_0) annimmt und eine Anfangsgeschwindigkeit von \mathbf{v}_0 hat, die man in horizontale und vertikale Komponenten, \mathbf{v}_{0x} bzw. \mathbf{v}_{0y} , aufteilen kann.

Horizontale Bewegung: Mit $a_x = 0$ und durch die Anwendung der kine-

matischen Beziehungen erhält man (s. Abb. 10.3)

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a_c t \Rightarrow v_x = v_{0x} \quad (\overset{+}{\rightarrow}) \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \Rightarrow x = x_0 + v_{0x} t \quad (\overset{+}{\rightarrow}) \\ v^2 &= v_0^2 + 2a_c(s - s_0) \Rightarrow v_x = v_{0x} \quad (\overset{+}{\rightarrow}) \end{aligned}$$

Die erste und die dritte Gleichung zeigen, dass während der Bewegung die horizontale Komponente der Geschwindigkeit konstant bleibt.

Vertikale Bewegung: Da die positive Richtung der y -Achse nach oben angenommen wurde, ist die vertikale Beschleunigung $a_y = -g$. Die Anwendung der kinematischen Beziehungen ergibt

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a_c t \Rightarrow v_y = v_{0y} - gt \quad (+ \uparrow) \\ y &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \Rightarrow y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (+ \uparrow) \\ v^2 &= v_0^2 + 2a_c(y - y_0) \Rightarrow v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \quad (+ \uparrow) \end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} ergibt sich aus der Vektorsumme von \mathbf{v}_x und \mathbf{v}_y und ist zur Bahn tangential. Die dritte Gl. kann aus dem Eliminieren der Zeit t zwischen den ersten beiden Gleichungen erzielt werden, und daher sind immer nur zwei aus diesen drei Gleichungen von einander unabhängig.

Aufgaben, die den Wurf eines Objektes betreffen, können höchstens drei Unbekannten haben, weil man nur drei von einander unabhängigen Gleichungen aufstellen kann; eine für horizontale Richtung und zwei für vertikale Richtung.

Beispiel 10.2

10.3.2 Daratellung im Polaren Koordinatensystem

Manchmal ist es auf Grund der Bewegungsform zweckmäßig das polare Koordinatensystem (r, θ) zur Beschreibung der Bewegung in einer Ebene heran zu ziehen. Die Position eines Partikels im polaren Koordinatensystem wird durch eine radiale Komponente r und eine zirkulare Komponente θ definiert. Die radiale Komponente ist der Abstand zwischen einem festen Bezugspunkt O und dem Partikel P . Die Komponente θ stellt den

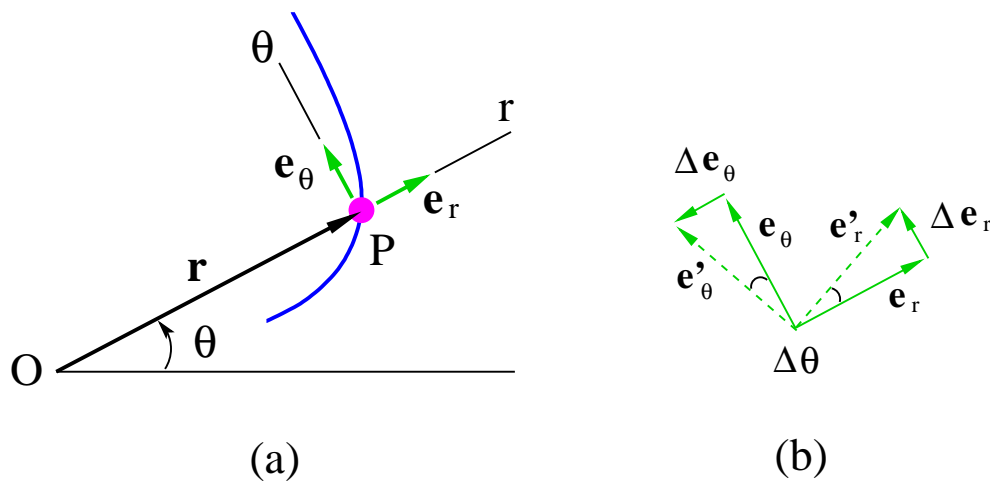


Abb. 10.4: (a) Darstellung der Position eines Partikels im polaren Koordinatensystem; r und θ . (b) Eine Änderung in θ verursacht eine Änderung in Einheitsvektoren.

Winkel zwischen der r -Achse und einer festen Bezugslinie dar. Die positive Richtung der Koordinaten r und θ werden durch Einheitsvektoren \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_θ definiert (s. Abb. 10.4 a). Hier zeigt \mathbf{e}_r vom Partikel P in die wachsende Richtung von r . Der Winkel θ wird als positiv gezählt, wenn sich die Bezugslinie gegen den Uhrzeigersinn drehen muss, um auf die r -Achse zu fallen. Beide Einheitsvektoren sind zeitabhängig, weil ihre Richtungen infolge der Bewegung geändert werden.

Position: Die Position des Punktes P wird durch den Ortsvektor \mathbf{r} definiert:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \quad (10.16)$$

Geschwindigkeit: Die Geschwindigkeit \mathbf{v} des Punktes erhält man durch die Ableitung des Ortsvektors $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ nach Zeit:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

Der Betrag von \mathbf{e}_r bleibt unverändert (Einheitsvektor), während seine Richtung sich mit der Zeit ändert. Somit ein Δr ruft keine Änderung in \mathbf{e}_r hervor, aber ein $\Delta\theta$ verursacht, dass \mathbf{e}_r sich zu \mathbf{e}'_r ändert, wobei $\mathbf{e}'_r = \mathbf{e}_r + \Delta\mathbf{e}_r$ ist (siehe Abb. 10.4 b). Für kleine Richtungsänderung $d\theta$ resultiert daraus: $d\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta d\theta$. Mit der gleichen Begründung und unter Berücksichtigung der Richtungen, erhält man $d\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r d\theta$. Die Zeitablei-

tungen der beiden Einheitsvektoren ergeben sich damit zu:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_r &= \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta &= \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_r = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich somit zu:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta. \quad (10.17)$$

Der Vektor \mathbf{v} besteht aus einer *radialen* Komponente $\dot{r}\mathbf{e}_r$ und einer *zirkularen* Komponente $r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$. Die Beträge dieser Komponenten sind:

$$v_r = \dot{r} \quad ; \quad v_\theta = r\dot{\theta}. \quad (10.18)$$

Den Betrag der Geschwindigkeit als Resultierende bekommt man aus

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}.$$

Beschleunigung : Die Beschleunigung \mathbf{a} des Punktes erhält man durch die Ableitung des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} nach Zeit (bzw. durch die zweite Ableitung des Ortsvektors \mathbf{r}):

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta. \quad (10.19)$$

Offensichtlich hat Beschleunigung eine radiale Komponente $a_r\mathbf{e}_r$ und eine zirkulare Komponente $a_\theta\mathbf{e}_\theta$, deren Beträge wie folgt bestimmt werden:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad ; \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}. \quad (10.20)$$

Die resultierende Beschleunigung ist in der Regel nicht tangential zur Bahn und hat den Betrag

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}.$$

Im polaren Koordinatensystem werden zwei weitere kinematische Größen definiert, die sich auf die Winkeländerung des Ortsvektors beziehen.

Winkelgeschwindigkeit ω : ist der infinitesimale Winkel $d\theta$, der der Ortsvektor in der infinitesimalen Zeit dt überstreicht und den Einheit [1/sek] hat.

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad (10.21)$$

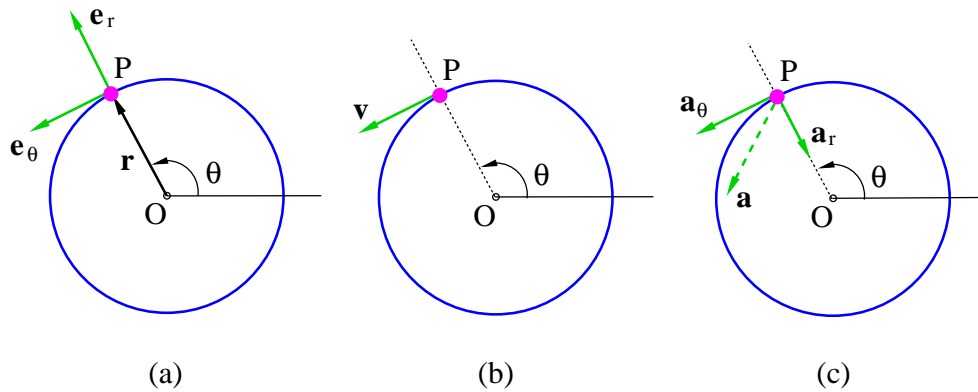


Abb. 10.5: Kreisbewegung im polaren Koordinatensystem: a) Position, b) Geschwindigkeit, c) Beschleunigung.

Winkelbeschleunigung α : ist die Zeitableitung der Winkelgeschwindigkeit und hat den Einheit $[1/\text{sek}^2]$ hat.

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (10.22)$$

Kreisbewegung

Bewegung auf einem Kreis ist ein Sonderfall, bei dem der Einheitsvektor \mathbf{e}_θ stets die Richtung der Bahntangente hat und es gilt $r = \text{konst.}$ (s. Abb. 10.5 a). Aus der Zeitableitung des Ortsvektors $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ erhält man für die *Geschwindigkeit*:

$$\mathbf{v} = r\dot{\mathbf{e}}_r = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = r\omega\mathbf{e}_\theta. \quad (10.23)$$

Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeit in diesem Fall keine radiale Komponente hat. Die zur Bahn tangential Komponente hat den Betrag $|\mathbf{v}| = r\omega$ (s. Abb. 10.5 b).

Die *Beschleunigung* ergibt sich entsprechend aus

$$\mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta = -r\omega^2\mathbf{e}_r + r\dot{\omega}\mathbf{e}_\theta. \quad (10.24)$$

Die Beschleunigung hat zwei Komponenten: die *zentripetale* Beschleunigung $a_r = -r\omega^2$, die zum Kreismittelpunkt gerichtet ist, und die *zirkulare* Beschleunigung $a_\theta = r\dot{\omega}$, die zur Bahnkreis tangential ist (s. Abb. 10.5 c). Wenn die Bewegung auf dem Kreis eine konstante Winkelgeschwindigkeit hat, $r\omega = \text{konst.}$, erhält man

$$a_r = \text{konst.} \quad ; \quad a_\theta = 0.$$

Beispiel 10.3

10.3.3 Darstellung im natürlichen Koordinatensystem - 2D

Wenn die Bahn einer Bewegung bekannt ist, lässt sich das natürliche Koordinatensystem oft effektiver einsetzen als die anderen. Der Ursprung des natürlichen Koordinatensystems liegt auf dem Partikel und bewegt sich mit ihm. Das natürliche Koordinatensystem hat in der Bewegungsebene zwei Komponenten (s. Abb. 10.6 a), die senkrecht zu einander stehen. Die erste Komponente ist tangential zur Bahn (t -Achse) und den Einheitsvektor \mathbf{e}_t zeigt den positiven Richtungssinn so, dass die zurückgelegte Strecke s bezogen zu einem festen Punkt O zunimmt. Die zweite Achse ist die n -Achse, die senkrecht zur t -Achse steht und ihre positive Richtung durch den Einheitsvektor \mathbf{e}_n wiedergegeben wird. \mathbf{e}_n zeigt vom Punkt P zu dem momentanen Krümmungszentrum der Bahn O' , das stets auf der konkaven Seite der Bahnkurve liegt (s. Abb. 10.6 b). Die Ebene, die durch t - und n -Achse aufgespannt wird, wird als *Schmiegungeebene* bezeichnet und ist im ebenen Fall mit der Bahnebene identisch. Da der Ursprung des Koordinatensystems mit dem Partikel unetwags ist, kann die Position nicht durch einen Ortsvektor in dem selben Koordinatensystem beschrieben werden. Die Position soll in diesem Fall aus der Definition der Bahn, die in einem festen Koordinatensystem beschrieben wurde, erfolgen.

Geschwindigkeit: Der Geschwindigkeitsvektor ist stets tangential zur Bahn

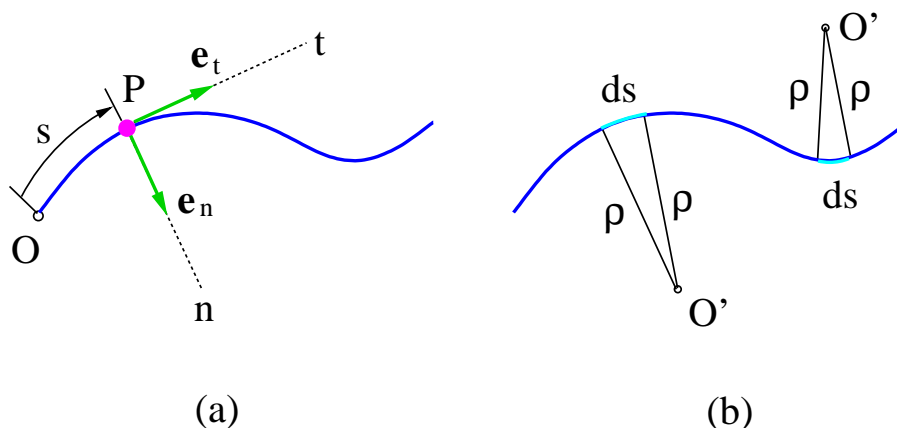


Abb. 10.6: Bewegung im natürlichen Koordinatensystem, a) Einheitsvektoren in Tangentialrichtung und Normalrichtung, b) Krümmungsradius und Krümmungszentrum.

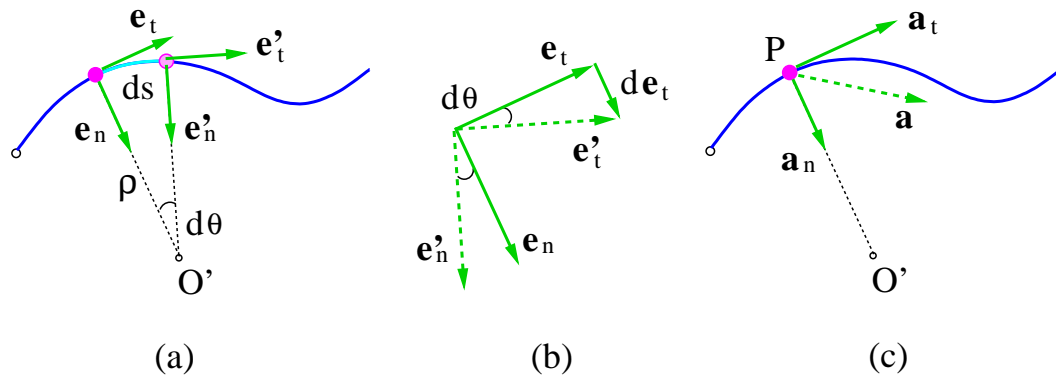


Abb. 10.7: Bewegung im natürlichen Koordinatensystem, a) Änderung der Position und Einheitsvektoren, b) Konstruktion für differentielle Richtungsänderung, c) Komponenten der Beschleunigung.

und zwar mit dem Richtungssinn von \mathbf{e}_t , und hat einen Betrag, der aus der Ableitung der Strecke s nach Zeit bestimmt wird. Somit hat man

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t \quad \text{mit} \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (10.25)$$

Beschleunigung: Die Beschleunigung ergibt sich aus der Zeitableitung der Geschwindigkeit

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t$$

Während der Betrag von \mathbf{e}_t konstant bleibt, ändert sich seine Richtung. Für kleine Richtungsänderung $d\theta$ gilt: $d\mathbf{e}_t = d\theta\mathbf{e}_n$ (s. Abb. 10.7 b). Die Ableitung nach Zeit ergibt: $\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\theta}\mathbf{e}_n$. Wenn der Krümmungsradius durch ρ bezeichnet wird¹, erhält man für die infinitesimale Bogenlänge $ds = \rho d\theta$, deren Ableitung nach Zeit ergibt: $\dot{s} = \dot{\theta}\rho$. Somit erhält man

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\theta}\mathbf{e}_n = \frac{\dot{s}}{\rho}\mathbf{e}_n = \frac{v}{\rho}\mathbf{e}_n.$$

Die Beschleunigung ergibt sich zu:

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{e}_t + a_n\mathbf{e}_n, \quad (10.26)$$

wobei gilt:

$$a_t = \dot{v} \quad (\text{oder } a_t ds = v dv) \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (10.27)$$

¹Wenn die Bahn als $y = f(x)$ gegeben ist, wird der Krümmungsradius an jedem Punkt auf der Bahn mittels folgender Beziehung gerechnet: $\rho = \frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}{|\frac{d^2y}{dx^2}|}$

Der Betrag von Beschleunigung ergibt sich aus

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

Beispiel 10.4

10.4 Bewegung im Raum

Wenn ein Partikel sich entlang einer räumlichen Kurve bewegt, braucht man zur Beschreibung der Bewegung drei unabhängige Koordinaten. Hier ist die Wahl des Koordinatensystems ebenso wie bei der Bewegung in einer Ebene frei, es bleibt auch dabei, dass für jede Art Aufgabe das eine oder das andere Koordinatensystem sich als das geeignetste erweist.

10.4.1 Darstellung im Kartesischen Koordinatensystem - 3D

Hier braucht man zusätzlich zu den Koordinaten (x, y) die dritte Kartesische Koordinate z . In diesem Fall wird die Lage (Position) des Partikels im Raum durch den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (10.28)$$

Beschrieben (s. Abb.10.8 a). Der *Betrag* von \mathbf{r} ergibt sich aus

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

der immer positiv ist. Die *Richtung* von \mathbf{r} wird, wie im 2D-Fall, durch Komponenten des Einheitsvektors $\mathbf{e}_r = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$ bestimmt.

Weitere kinematische Beziehungen ändern sich entsprechend wie folgt:

Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) + \frac{d}{dt}(y\mathbf{j}) + \frac{d}{dt}(z\mathbf{k})$$

Hier ist die Ableitungen von \mathbf{k} ähnlich wie bei \mathbf{i} und \mathbf{j} im ebenen Fall. So erhält man

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \quad (10.29)$$

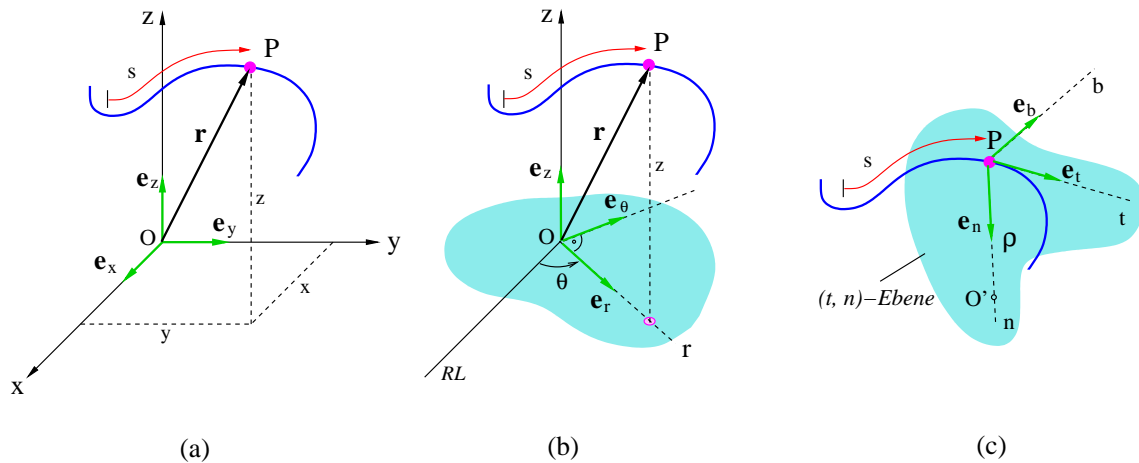


Abb. 10.8: Bewegung im Raum, a) Kartesisches Koordinatensystem, b) polares Koordinatensystem, c) natürliches Koordinatensystem.

wobei gilt:

$$v_x = \dot{x} \quad ; \quad v_y = \dot{y} \quad ; \quad v_z = \dot{z}. \quad (10.30)$$

Die Geschwindigkeit hat den positiven Betrag

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Beschleunigung :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad (10.31)$$

wobei

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad ; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \quad ; \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \quad (10.32)$$

ist. Der Betrag von Beschleunigung hat den positiven Wert

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Die Richtungen von \mathbf{v} und \mathbf{a} werden durch Komponenten der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_v = (\frac{v_x}{v}, \frac{v_y}{v}, \frac{v_z}{v})$ bzw. $\mathbf{e}_a = (\frac{a_x}{a}, \frac{a_y}{a}, \frac{a_z}{a})$ bestimmt. Während die Geschwindigkeit stets tangential zur Bahn ist, steht die Beschleunigung i. d. R. nicht tangential zur Bahn.

10.4.2 Darstellung im zylindrischen Koordinatensystem

Das zylindrische Koordinatensystem ist die verallgemeinerte Form des polaren Koordinatensystems. Es hat zusätzlich zu den Koordinaten (r, θ) die

Koordinate z . Die Koordinate z steht senkrecht zu der (r, θ) -Ebene und ihren positiven Richtungssinn wird durch den Einheitsvektor \mathbf{e}_z so gegeben, dass das Vektorprodukt $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta$ gilt (s. Abb.10.8 b).

Die kinematischen Größen lassen sich in diesem Koordinatensystem unter Berücksichtigung der dritten Koordinate wie folgt beschreiben:

Position: Die Position des Punktes P wird durch den Ortsvektor \mathbf{r} definiert:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z. \quad (10.33)$$

Es sei gemerkt, dass r hier nicht den Betrag von \mathbf{r} , sondern den Betrag seiner Projektion auf der (r, θ) -Ebene darstellt. Der Betrag von \mathbf{r} ergibt sich aus

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Während bei einer Bewegung beide Einheitsvektoren \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_θ ihre Richtungen ändern, bleibt die Richtung von \mathbf{e}_z unverändert. Da der Betrag von \mathbf{e}_z ebenso konstant ist, ist dieser Einheitsvektor im Gegensatz zu \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_θ zeitunabhängig.

Geschwindigkeit ist gegeben durch:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z. \quad (10.34)$$

Die Geschwindigkeit hat den positiven Betrag

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2},$$

wobei gilt:

$$v_r = \dot{r} \quad ; \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad ; \quad v_z = \dot{z}. \quad (10.35)$$

Beschleunigung ist gegeben durch:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z. \quad (10.36)$$

Der Betrag von Beschleunigung hat den positiven Wert

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2},$$

wobei gilt:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad ; \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad ; \quad a_z = \ddot{z}. \quad (10.37)$$

Die Richtungen von \mathbf{v} und \mathbf{a} werden durch Komponenten der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_v = (\frac{v_r}{v}, \frac{v_\theta}{v}, \frac{v_z}{v})$ bzw. $\mathbf{e}_a = (\frac{a_r}{a}, \frac{a_\theta}{a}, \frac{a_z}{a})$ bestimmt. Während die Geschwindigkeit stets tangential zur Bahn ist, steht die Beschleunigung i. d. R. nicht tangential zur Bahn.

10.4.3 Darstellung im natürlichen Koordinatensystem - 3D

Die Beschreibung einer räumlichen Bewegung im natürlichen Koordinatensystem ist mit der Beschreibung im ebenen Fall identisch, weil sie anhand zwei Koordinaten erfolgt, die sich mit dem Partikel bewegen. Diese zwei Koordinaten stehen senkrecht zu einander und bilden eine Ebene. Während diese Ebene im 2D-Fall mit der Bahnebene deckungsgleich ist, ist sie im 3D-Fall für jeden Punkt auf der Bahn eine andere. Die Tangentenachse t ist an jedem Punkt eindeutig definiert. Senkrecht zur t -Achse können unendlich Achsen konstruiert werden. Uns interessiert jedoch nur die Achse, die durch das momentane Krümmungszentrum O' geht (*Hauptnormalachse*) und gemeinsam mit der t -Achse die sogenannte *Schmiegungebene* bildet. Eine dritte Achse wird senkrecht zur Schmiegungebene definiert. Die positive Richtung dieser Achse wird durch den Einheitsvektor \mathbf{e}_b gegeben. Die Einheitsvektoren \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n und \mathbf{e}_b bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem:

$$\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n .$$

Wenn zwei von drei Einheitsvektoren bekannt sind, lässt sich der dritte anhand dieser Beziehung bestimmen.